

Московский Государственный Университет
имени М. В. Ломоносова
Факультет Вычислительной Математики и Кибернетики
Кафедра Оптимального Управления

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

(V семестр)

лектор — доцент М. В. Орлов
составитель — В. С. Рябцев

Москва 2002

Содержание

1	Элементы выпуклого анализа	3
	Алгебраические операции в пространстве компактов	4
	Свойства алгебраических операций	5
	Метрика Хаусдорфа	6
	Теорема о существовании минимальной выпуклой оболочки множества . . .	8
	Лемма о строгой отделимости	9
	Опорные функции	10
	Свойства опорных функций	11
	Построение минимальной выпуклой оболочки по опорной функции множества	16
2	Многозначные отображения	21
	Непрерывность многозначных отображений	21
	Лемма о необходимом и достаточном условии непрерывности многозначного отображения	22
	Однозначные ветви многозначных функций	24
	Производная опорной функции	25
	Теорема о существовании однозначной измеримой ветви	27
	Теорема Ляпунова	33
	Теорема о внесении знака опорной функции под знак интеграла	35
3	Принцип максимума Понтрягина	38
	Экспоненциал матрицы	38
	Абсолютно непрерывные функции	43
	Формула Коши	43
	Теорема Каратеодори	43
	Множество достижимости и его свойства	46
	Множество управляемости и его свойства	47

1 Элементы выпуклого анализа

Назовем множество $S_R(x_0) = \{x \in \mathbf{E}^n : \|x - x_0\| \leq R\}$ шаром радиуса R с центром в точке x_0 , а множество $S = \{x \in \mathbf{E}^n : \|x\| = 1\}$ сферой единичного радиуса. Введем ряд определений.

Определение 1. Множество A называется *открытым*, если

$$\forall x \in A \exists \varepsilon > 0 : S_\varepsilon(x) \subseteq A.$$

Определение 2. Множество $A \subset \mathbf{E}^n$ называется *ограниченным*, если существует такое положительное R , что $A \subseteq S_R(0)$. При этом число

$$|A| = \sup_{a \in A} \|a\|$$

называется *модулем* множества A .

Очевидно, $A \subseteq S_{|A|}(0)$ (если R конечное).

Определение 3. Точка $x \in \mathbf{E}^n$ называется *предельной точкой* множества A , если $\forall \varepsilon > 0 \quad S_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$

Определение 4. Множество, содержащее все свои предельные точки, называется *замкнутым*.

Определение 5. Замкнутое ограниченное множество в $\mathbf{E}^n$ называется *компактом*.

Примером компакта является *отрезок*, т.е. множество

$$[x, y] = \{z : z = \lambda x + (1 - \lambda)y, \lambda \in [0, 1]\}, \quad x, y \in \mathbf{E}^n.$$

Или, что то же самое

$$\bigcup_{\lambda \in [0, 1]} \{\lambda x + (1 - \lambda)y\}.$$

Определение 6. Множество A называется *выпуклым*, если для любых x, y из этого множества выполняется $[x, y] \subseteq A$.

Множество всех компактных множеств (компактов) из $\mathbf{E}^n$ обозначим $\Omega(\mathbf{E}^n)$. Через $\text{conv } \Omega(\mathbf{E}^n)$ обозначим множество всех выпуклых компактов в $\mathbf{E}^n$.

Определение 7. Выпуклое множество G называется *выпуклой оболочкой* множества $A \subset \mathbf{E}^n$, если $A \subseteq G$.

Определение 8. Выпуклое множество H называется *минимальной выпуклой оболочкой* множества A , если выполнены два условия:

- 1) $A \subseteq H$,
- 2) Для любой выпуклой оболочки G множества A выполняется $H \subseteq G$.

Минимальная выпуклая оболочка множества A обозначается как $\text{conv } A$. Легко видеть, что

$$\text{conv } A = \bigcap_{A \subseteq P} P,$$

где P — выпуклые множества.

Алгебраические операции в пространстве компактов

Определение 9. Алгебраической суммой двух множеств $A, B \subset \mathbf{E}^n$ называется множество

$$\begin{aligned} A + B = C &= \{c \in \mathbf{E}^n : c = a + b, a \in A, b \in B\} = \\ &= \bigcup_{a \in A, b \in B} \{a + b\} = \bigcup_{a \in A} \{a + B\} = \bigcup_{b \in B} \{b + A\}. \end{aligned}$$

Определение 10. Произведением множества A и числа $\lambda \in E$ называется множество

$$\lambda A = \{c \in \mathbf{E}^n : c = \lambda a, a \in A\}$$

Пример 1. Пусть имеется два множества:

$$A = \{a = (a_1, a_2) \in E^2 : a_2 = 0, |a_1| \leq 1\};$$

$$B = \{a = (a_1, a_2) \in E^2 : a_1 = 0, a_2 \leq 1\}.$$

Построим их сумму.

Прежде чем перейти ко второму примеру, заметим, что для любого шара $S_R(a)$ справедливо представление $S_R(a) = a + R \cdot S_1(0)$.

Пример 2. Докажем равенство

$$S_{r_1}(a_1) + S_{r_2}(a_2) = S_{r_1+r_2}(a_1 + a_2).$$

Равенство двух множеств A и B эквивалентно выполнению двух условий:

$$\forall a \in A \Rightarrow a \in B \Rightarrow A \subseteq B,$$

$$\forall b \in B \Rightarrow b \in A \Rightarrow B \subseteq A.$$

Рассмотрим какой-либо элемент a из множества $S_{r_1}(a_1) + S_{r_2}(a_2)$, тогда

$$a = \bar{a}_1 + \bar{a}_2, \quad \bar{a}_1 \in S_{r_1}(a_1), \quad \bar{a}_2 \in S_{r_2}(a_2),$$

следовательно,

$$a = a_1 + r_1\xi + a_2 + r_2\eta = (a_1 + a_2) + (r_1\xi + r_2\eta),$$

где $\xi \in S_1(0)$, $\eta \in S_1(0)$. Из свойств нормы получаем:

$$\|a - (a_1 + a_2)\| = \|r_1\xi + r_2\eta\| \leq r_1\|\xi\| + r_2\|\eta\| \leq r_1 + r_2;$$

следовательно $a \in S_{r_1+r_2}(a_1 + a_2)$. Покажем теперь вложение в другую сторону. Пусть $a \in S_{r_1+r_2}(a_1 + a_2)$, тогда

$$a = a_1 + a_2 + (r_1 + r_2)u = (a_1 + r_1u) + (a_2 + r_2u) = \bar{a}_1 + \bar{a}_2,$$

где $u \in S_1(0)$. Но $a_1 + r_1u \in S_{r_1}(a_1)$, $a_2 + r_2u \in S_{r_2}(a_2)$. Отсюда получаем, что

$$a \in S_{r_1}(a_1) + S_{r_2}(a_2).$$

Свойства алгебраических операций

- 1) $A + B = B + A$ — коммутативность
- 2) $(A + B) + C = A + (B + C)$ — ассоциативность
- 3) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ — дистрибутивность
- 4) $1 \cdot A = A$ — единица по λ
- 5) Нет обратного элемента по операции сложения. Это означает, что нельзя получить линейное пространство. Проверим, например, выполняется ли тождество $A - A = A + (-1) \cdot A = \{0\}$. Возьмём $A = S_1(0)$.

$$S_1(0) - S_1(0) = S_1(0) + (-1) \cdot S_1(0) = S_1(0) + S_1(0) = S_2(0),$$

т.е. тождество неверно.

- 6) Тождество $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta B$ также неверно, однако выполняется вложение $(\alpha + \beta)A \subseteq \alpha A + \beta B$

Лемма 1. Пусть A — выпуклое множество, $\alpha, \beta \geq 0$. Тогда

$$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A.$$

Доказательство. Необходимость. $\forall b \in (\alpha + \beta)A \Rightarrow b = (\alpha + \beta)a$, где a — некоторый элемент из A , значит

$$b = \underbrace{\alpha a}_{\in \alpha A} + \underbrace{\beta a}_{\in \beta A} \in \alpha A + \beta A \Rightarrow (\alpha + \beta)A \subseteq \alpha A + \beta A.$$

Достаточность. $\forall b \in \alpha A + \beta A \Rightarrow \exists a_1 \in A, a_2 \in A : b = \alpha a_1 + \beta a_2$. Если $\alpha = \beta = 0$, то равенство тривиально. Пусть $\alpha > 0$. Тогда

$$b = \alpha a_1 + \beta a_2 = (\alpha + \beta) \left(\underbrace{\frac{\alpha}{\alpha + \beta}}_{\lambda_1} a_1 + \underbrace{\frac{\beta}{\alpha + \beta}}_{\lambda_2} a_2 \right);$$

Так как, по условию теоремы, $\alpha, \beta \geq 0$, то $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0$, причем $\lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1]$. Очевидно, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, $\lambda_2 = 1 - \lambda_1$, поэтому, в силу выпуклости множества A ,

$$\underbrace{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2}_{\bar{a}} = \lambda_1 a_1 + (1 - \lambda_1) a_2 \in A;$$

значит $b = (\alpha + \beta)\bar{a}$ содержится в $(\alpha + \beta)A$. Лемма доказана. $\square$

Пространство непустых компактов $\Omega(\mathbf{E}^n)$ не является линейным пространством (например, в силу отсутствия обратного элемента по операции сложения). Однако его можно сделать метрическим.

Метрика Хаусдорфа

Рассмотрим пространство $\Omega(\mathbf{E}^n)$. Введем на нём метрику следующим образом:

$$A, B \in \Omega(\mathbf{E}^n), \quad h(A, B) = \inf_{r \geq 0} \{A \subseteq B + S_r(0), B \subseteq A + S_r(0)\}.$$

Проверим аксиомы метрики:

- 1) $h(A, B) \geq 0$ для любых $A, B \in \Omega(\mathbf{E}^n)$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $A = B$.
- 2) $h(A, B) = h(B, A)$ — закон коммутативности.
- 3) $h(A, B) \leq h(A, C) + h(C, B)$ — неравенство треугольника.

Свойства 1) и 2) проверяются тривиально. Докажем свойство 3). Из определения метрики Хаусдорфа следует, что выполняются следующие вложения:

$$A \subseteq C + S_{h(A,C)}(0), \quad C \subseteq B + S_{h(C,B)}(0).$$

Подставив C из второго выражения в первое, получим:

$$A \subseteq B + S_{h(A,C)}(0) + S_{h(C,B)}(0) = B + S_{h(A,C)+h(C,B)}(0).$$

Аналогично

$$\begin{aligned} B &\subseteq C + S_{h(C,B)}(0), \quad C \subseteq A + S_{h(A,C)}(0) \Rightarrow \\ B &\subseteq A + S_{h(A,C)}(0) + S_{h(C,B)}(0) = A + S_{h(A,C)+h(C,B)}(0). \end{aligned}$$

Значит заведомо $h(A, B) \leq h(A, C) + h(C, B)$. Таким образом пространство компактов (не обязательно выпуклых) — метрическое.

Пример 3. Пусть имеются следующие множества: $A = S_1(0) \subseteq \mathbf{E}^2$ — шар единичного радиуса и квадрат $B = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{E}^2 : |x_1| \leq 1, |x_2| \leq 1\}$. Найдем расстояние между ними. Очевидно $A \subset B$, т.е. условие $A \subseteq B + S_r(0)$ выполняется уже при $r = 0$. Найдем минимальное r при котором $B \subseteq A + S_r(0)$. Из рисунка, а также из правила сложения множеств, представляющих собой шары, видно, что искомое r равно $\sqrt{2} - 1$.

Пример 4. Найдем теперь расстояние между произвольными шарами $S_{r_1}(a_1)$ и $S_{r_2}(a_2)$. Обозначим $h = h(S_{r_1}(a_1), S_{r_2}(a_2))$. Из определения расстояния Хаусдорфа вытекает, что

$$\begin{aligned} S_{r_1}(a_1) &\subseteq S_{r_2}(a_2) + S_h(0) = S_{r_2+h}(a_2), \\ S_{r_2}(a_2) &\subseteq S_{r_1}(a_1) + S_h(0) = S_{r_1+h}(a_1) \end{aligned}$$

Для любого элемента a из множества $S_{r_1}(a_1)$ справедливо представление $a = a_1 + r_1\xi$, где ξ — некоторый элемент единичного шара $S_1(0)$. Из первого выражения следует, что если $a \in S_{r_1}(a_1)$, то $a \in S_{r_2+h}(a_2)$, значит $\|a_1 + r_1\xi - a_2\| \leq r_2 + h$.

$$\sup_{\xi \in S_1(0)} \|a_1 - a_2\| + r_1 \leq r_2 + h \Rightarrow \|a_1 - a_2\| + r_1 - r_2 \leq h.$$

Из второго выражения совершенно аналогично получаем

$$\|a_1 - a_2\| + r_2 - r_1 \leq h.$$

Минимальное h , которое удовлетворяет сразу обоим неравенствам, равно

$$\|a_1 - a_2\| + |r_1 - r_2|,$$

то есть

$$h(S_{r_1}(a_1), S_{r_2}(a_2)) = \|a_1 - a_2\| + |r_1 - r_2|.$$

Пусть дано некоторое множество A . $H = \text{conv } A$ — минимальное выпуклое множество, содержащее A . Построим рекурсивную цепочку множеств:

$$\begin{aligned} F_0 &= A; \\ F_1 &= \bigcup_{x,y \in F_0} [x, y] = \bigcup_{\substack{\lambda \in [0,1] \\ x,y \in F_0}} \{\lambda x + (1 - \lambda)y\}; \\ &\dots\dots\dots \\ F_{m+1} &= \bigcup_{x,y \in F_m} [x, y]. \end{aligned}$$

Теорема 1. Для любого множества $A \subset \mathbf{E}^n$ существует $\text{conv } A$, причем

$$\text{conv } A = \bigcup_{m=0}^{\infty} F_m.$$

Пример 5. Допустим, множество F_0 состоит из трех точек: $F_0 = \{a_1, a_2, a_3\}$.

Рисунок

В конечномерном пространстве эта процедура конечна (в пространстве $\mathbf{E}^n$ придется выполнить не более n шагов).

Доказательство. Обозначим

$$H = \bigcup_{m=0}^{\infty} F_m.$$

Для того, чтобы доказать, что $H = \text{conv } A$, нужно показать, что H выпукло, $A \subseteq H$ и для любого выпуклого множества G , содержащего A , верно $H \subseteq G$. Очевидно, множества F_i монотонно вложены друг в друга:

$$F_0 \subseteq F_1 \subseteq F_2 \subseteq \dots \subseteq F_m \dots \subseteq H.$$

Значит $A = F_0 \subseteq H$. Покажем, что H выпукло. Для любых $x, y \in H$ найдутся такие номера m_1, m_2 , что $x \in F_{m_1}$, $y \in F_{m_2}$. Возьмем $m = \max(m_1, m_2)$, тогда из монотонной вложенности множеств F_i получаем: $x \in F_m$, $y \in F_m$. Отсюда, в силу правила построения последовательности F_i , вытекает: $[x, y] \subseteq F_{m+1} \subseteq H$, а это и означает, что множество H — выпуклое (по определению).

Берем теперь любое выпуклое множество G , содержащее множество A . Покажем, что G содержит H . Действительно,

$$F_0 \subseteq G, F_1 \subseteq G, F_2 \subseteq G, \dots, \forall m F_m \subseteq G, \dots \Rightarrow \bigcup_{m=0}^{\infty} F_m \subseteq G,$$

откуда вытекает, что $H \subseteq G$. Теорема доказана. □

Лемма 2 (о строгой отделимости). Пусть $H \in \text{conv } \Omega(\mathbf{E}^n)$ — выпуклый компакт, вектор $x_0 \notin H$. Тогда найдется вектор ψ из $\mathbf{E}^n$ такой, что $\langle \psi, h - x_0 \rangle < 0$ для любого $h \in H$.

Геометрически это означает, что в $\mathbf{E}^n$ существует вектор ψ , который определяет опорную гиперплоскость Γ_ψ такую, что H лежит в открытом полупространстве с одной стороны относительно этой гиперплоскости, а x_0 — с другой (см. рисунок). Отсюда название леммы — строгая отделимость.

+Рисунок

Доказательство. Рассмотрим функцию $f(h) = \|h - x_0\|$. По теореме Вейерштрасса она достигает своего минимального значения на компакте H . Пусть $h_0 \in H$ — точка минимума функции $f(h)$, т.е.

$$\min_{h \in H} \|h - x_0\| = \|h_0 - x_0\|.$$

Заметим, что $\|h_0 - x_0\| > 0$, так как $x_0 \notin H$. Далее, возьмем любое $h \in H$ и рассмотрим функцию

$$\bar{h}(\lambda) = \lambda h + (1 - \lambda)h_0 = \lambda(h - h_0) + h_0,$$

где $\lambda \in [0, 1]$. Очевидно, $\bar{h} \in H$ при любом значении λ из отрезка $[0, 1]$. Также легко видеть, что

$$\|\bar{h}(\lambda) - x_0\|^2 \geq \|h_0 - x_0\|^2 > 0,$$

в силу того, что $\bar{h}(\lambda)$ — какое-то значение из H , а h_0 — ближайшее к x_0 . Покажем, что значение $\psi = x_0 - h_0$ удовлетворяет условиям теоремы.

Обозначим $z(\lambda) = \|\bar{h}(\lambda) - x_0\| = \|\lambda(h - h_0) + h_0 - x_0\|$, тогда

$$z^2(\lambda) = \langle z(\lambda), z(\lambda) \rangle = \lambda^2 \|h - h_0\|^2 + 2\lambda \langle h - h_0, h_0 - x_0 \rangle + \|h_0 - x_0\|^2 \geq \|h_0 - x_0\|^2.$$

Из последнего неравенства получаем:

$$\lambda^2 \|h - h_0\|^2 + 2\lambda \langle h - h_0, h_0 - x_0 \rangle \geq 0.$$

Воспользовавшись тем, что λ принимает значения из отрезка $[0, 1]$, поделим последнее неравенство на λ :

$$\lambda \|h - h_0\|^2 + 2 \langle h - h_0, h_0 - x_0 \rangle \geq 0.$$

Устремляя λ к нулю, получаем: $\langle h - h_0, h_0 - x_0 \rangle \geq 0$ при любом $h \in H$. Надо показать, что $\langle h - x_0, x_0 - h_0 \rangle < 0$, или, что то же самое, $\langle h - x_0, h_0 - x_0 \rangle > 0$. Добавим и вычтем h_0 в первом сомножителе:

$$\langle h - h_0 + h_0 - x_0, h_0 - x_0 \rangle = \langle h - h_0, h_0 - x_0 \rangle + \langle h_0 - x_0, h_0 - x_0 \rangle.$$

Первое слагаемое в правой части равенства неотрицательно по доказанному выше, а второе — строго положительно в силу того, что $\|h - x_0\| > 0$, то есть

$$\langle h - x_0, h_0 - x_0 \rangle > 0,$$

откуда следует утверждение леммы. $\square$

Опорные функции

При изучении свойств множеств для выпуклых компактов можно рассматривать вместо множеств функции (так как с ними работать проще).

Пусть $A \in \Omega(\mathbf{E}^n)$ — компакт.

Определение 11. *Опорной функцией* $c(A, \psi)$ множества A в направлении ψ называется максимум $\langle A, \psi \rangle$:

$$c(A, \psi) = \max_{a \in A} \langle a, \psi \rangle.$$

Это определение можно расширить. Пусть A — ограниченное множество (то есть существует такое $R > 0$, что $A \subseteq S_R(0)$), тогда опорной функцией назовем

$$c(A, \psi) = \sup_{a \in A} \langle a, \psi \rangle.$$

Опорную функцию можно рассматривать как функцию множества (при фиксированном ψ), а можно как функцию вектора (при фиксированном A), что на практике используется чаще. Напомним, что скалярное произведение $\langle a, \psi \rangle$ можно представить, как $\|a\| \cdot \|\psi\| \cdot \cos \alpha$, где α — угол между векторами a и ψ . Иными словами, скалярное произведение — это величина (норма) проекции одного вектора на другой. Поэтому значение опорной функции равно величине максимальной проекции всевозможных векторов из A на вектор ψ .

Определение 12. Множество U_ψ векторов из A , которые имеют максимальную проекцию на вектор ψ называется *опорным множеством* множества A :

$$U_\psi = \{a \in A : \langle a, \psi \rangle = c(A, \psi)\}.$$

Определение 13. Гиперплоскость $\Gamma_\psi = \{x \in \mathbf{E}^n : \langle x, \psi \rangle = c(A, \psi)\}$ называется *опорной гиперплоскостью*.

Пример 6. Пусть $A = \{a\}$ — множество из одного элемента. Тогда опорная функция имеет вид:

$$c(A, \psi) = \langle a, \psi \rangle$$

Пример 7. Найдем опорную функцию для произвольного шара $S_r(a)$.

$$\begin{aligned} c(S_r(a), \psi) &= \max_{x \in S_r(a)} \langle x, \psi \rangle = \max_{\|u\| \leq 1} \langle a + R \cdot u, \psi \rangle = \max_{\|u\| \leq 1} (\langle a, \psi \rangle + \langle R \cdot u, \psi \rangle) = \\ &= \max_{\|u\| \leq 1} \langle a, \psi \rangle + R \cdot \max_{\|u\| \leq 1} \langle u, \psi \rangle = \langle a, \psi \rangle + R \cdot \|\psi\|. \end{aligned}$$

+Рисунок

Пример 8. Квадрат $A = \{(a_1, a_2) : |a_1| \leq 1, |a_2| \leq 1\}$. Воспользуемся тем, что скалярное произведение — это сумма попарных произведений координат:

$$\begin{aligned} c(A, \psi) &= \max_{a \in A} \langle a, \psi \rangle = \max_{\substack{|a_1| \leq 1 \\ |a_2| \leq 1}} (a_1 \psi_1 + a_2 \psi_2) = \\ &= \max_{|a_1| \leq 1} (a_1 \psi_1) + \max_{|a_2| \leq 1} (a_2 \psi_2) = |\psi_1| + |\psi_2|; \end{aligned}$$

где a_1 и a_2 — координаты вектора a , а ψ_1 и ψ_2 — координаты вектора ψ .

+Рисунок

Свойства опорных функций

1. Свойство положительной однородности по второму аргументу:

$$c(A, \lambda \psi) = \lambda c(A, \psi), \quad \forall \lambda \geq 0.$$

Доказательство.

$$c(A, \lambda \psi) = \max_{a \in A} \langle a, \lambda \psi \rangle = \max_{a \in A} \lambda \langle a, \psi \rangle = \lambda \max_{a \in A} \langle a, \psi \rangle = \lambda c(A, \psi).$$

□

В силу этого свойства, например, функция $c(\psi) = \psi_1^2 + \psi_2^2$ не является опорной ни к какому множеству (т. к. нарушена однородность). Верно и обратное: любая положительно однородная функция является опорной к некоторому множеству.

2. Свойство полуаддитивности по второму аргументу:

$$c(A, \psi_1 + \psi_2) \leq c(A, \psi_1) + c(A, \psi_2).$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} c(A, \psi_1 + \psi_2) &= \max_{a \in A} \langle a, \psi_1 + \psi_2 \rangle = \langle a_0, \psi_1 + \psi_2 \rangle = \\ &= \langle a_0, \psi_1 \rangle + \langle a_0, \psi_2 \rangle \leq c(A, \psi_1) + c(A, \psi_2). \end{aligned}$$

□

3. Условие Липшица (липшицевость) опорной функции по второму аргументу:

$$|c(A, \psi_1) - c(A, \psi_2)| \leq |A| \cdot \|\psi_1 - \psi_2\|,$$

где $|A|$ — модуль множества A .

Доказательство.

$$\begin{aligned} c(A, \psi_1) &= c(A, \psi_1 - \psi_2 + \psi_2) \stackrel{\text{CB-BO2}}{\leq} c(A, \psi_1 - \psi_2) + c(A, \psi_2) \Rightarrow \\ c(A, \psi_1) - c(A, \psi_2) &\leq c(A, \psi_1 - \psi_2) \leq |A| \cdot \|\psi_1 - \psi_2\|. \end{aligned}$$

Последнее неравенство следует из очевидного

$$\max_{a \in A} |\langle a, \psi \rangle| \leq |A| \cdot \|\psi\| \Rightarrow |c(A, \psi)| \leq |A| \cdot \|\psi\|.$$

Аналогично

$$\begin{aligned} c(A, \psi_2) &= c(A, \psi_2 - \psi_1) + c(A, \psi_1) \iff \\ \iff c(A, \psi_2) - c(A, \psi_1) &\leq c(A, \psi_2 - \psi_1) \leq |A| \cdot \|\psi_1 - \psi_2\|. \end{aligned}$$

Два доказанных неравенства эквивалентны следующему:

$$|c(A, \psi_1) - c(A, \psi_2)| \leq |A| \cdot \|\psi_1 - \psi_2\|,$$

что и требовалось доказать.

□

Следствие. Опорная функция $c(A, \psi)$ непрерывна по ψ : при $\psi \rightarrow \psi'$ выполняется $c(A, \psi) \rightarrow c(A, \psi')$.

Рассмотрим множество $D \cdot A$, где D — матрица размера $(n \times n)$:

$$D \cdot A = \{x \in E^n : x = Da, a \in A\}.$$

4. $c(DA, \psi) = c(A, D^* \psi)$, где D^* — транспонированная матрица D .

Доказательство.

$$c(DA, \psi) = \max_{x \in DA} \langle x, \psi \rangle = \max_{a \in A} \langle Da, \psi \rangle = \max_{a \in A} \langle a, D^* \psi \rangle = c(A, D^* \psi)$$

□

Следствие. Рассмотрим частный случай этого свойства. Пусть

$$D = \{\lambda\}, \lambda \geq 0, \lambda \in \mathbb{R}^1,$$

тогда

$$c(\lambda A, \psi) \stackrel{\text{св-во 4}}{=} c(A, \lambda \psi) \stackrel{\text{св-во 1}}{=} \lambda c(A, \psi).$$

Это положительная однородность по первому аргументу.

5. Аддитивность по первому аргументу:

$$c(A + B, \psi) = c(A, \psi) + c(B, \psi)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} c(A + B, \psi) &= \max_{x \in A+B} \langle x, \psi \rangle = \max_{\substack{a \in A \\ b \in B}} \langle a + b, \psi \rangle = \max_{\substack{a \in A \\ b \in B}} (\langle a, \psi \rangle + \langle b, \psi \rangle) = \\ &= \max_{a \in A} \langle a, \psi \rangle + \max_{b \in B} \langle b, \psi \rangle = c(A, \psi) + c(B, \psi) \end{aligned}$$

□

Следствие. Пусть $A, B \in \Omega(\mathbf{E}^n)$, $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$, тогда

$$c(\lambda_1 A + \lambda_2 B, \psi) = \lambda_1 c(A, \psi) + \lambda_2 c(B, \psi).$$

6. $c(A \cup B, \psi) = \max\{c(A, \psi), c(B, \psi)\}$. Если есть семейство множеств A_λ , причем $\lambda \in \Lambda$, и каждое из множеств A_λ ограничено, то

$$c\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda, \psi\right) = \sup_{\lambda \in \Lambda} c(A_\lambda, \psi).$$

Это доказывается из определений:

$$\begin{aligned} c(A \cup B, \psi) &= \max_{x \in A \cup B} \langle x, \psi \rangle = \max \left(\max_{a \in A} \langle a, \psi \rangle, \max_{b \in B} \langle b, \psi \rangle \right) = \\ &= \max[c(A, \psi), c(B, \psi)] \\ c\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda, \psi\right) &= \sup_{\substack{x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \\ \lambda \in \Lambda}} \langle x, \psi \rangle = \sup_{\lambda \in \Lambda} \max_{a \in A_\lambda} \langle a, \psi \rangle = \sup_{\lambda \in \Lambda} c(A_\lambda, \psi). \end{aligned}$$

7. Если A — компакт, то $c(A, \psi) = c(\text{conv } A, \psi)$ для любого ψ из $\mathbf{E}^n$ (т.е. опорные функции для компакта и его минимальной выпуклой оболочки совпадают).

Доказательство. В теореме 1 показано, что для $\text{conv } A$ справедливо выражение

$$\text{conv } A = \bigcup_{m=0}^{\infty} F_m,$$

где F_m определяются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} F_0 &= A; \\ F_1 &= \bigcup_{x,y \in F_0} [x, y] = \bigcup_{\substack{\lambda \in [0,1] \\ x,y \in F_0}} \{\lambda x + (1 - \lambda)y\}; \\ &\dots\dots\dots \\ F_{m+1} &= \bigcup_{x,y \in F_m} [x, y]. \end{aligned}$$

В силу свойства 6 опорных функций

$$c(\text{conv } A, \psi) = c\left(\bigcup_{m=0}^{\infty} F_m, \psi\right) = \sup_{m \geq 0} c(F_m, \psi).$$

Покажем по индукции, что $\forall i \ c(F_i, \psi) = c(A, \psi)$. При $m=0$, очевидно, $F_0 = A$ и $c(F_i, \psi) = c(A, \psi)$. Предположим, что наше равенство выполняется при некотором m :

$$c(F_m, \psi) = c(A, \psi).$$

Покажем, что оно будет выполнено при $m + 1$:

$$\begin{aligned} c(F_{m+1}, \psi) &= c\left(\bigcup_{\lambda \in [0,1]} \{\lambda F_m + (1 - \lambda)F_m\}, \psi\right) \stackrel{\text{св-во 6}}{=} \\ &= \sup_{\lambda \in [0,1]} c(\{\lambda F_m + (1 - \lambda)F_m\}, \psi) \stackrel{\text{св-во 5}}{=} \\ &= \sup_{\lambda \in [0,1]} (\lambda c(F_m, \psi) + (1 - \lambda)c(F_m, \psi)) \stackrel{\substack{\text{предп.} \\ \text{индукции}}}{=} \\ &= \sup_{\lambda \in [0,1]} (\lambda c(A, \psi) + (1 - \lambda)c(A, \psi)) = \sup_{\lambda \in [0,1]} c(A, \psi) = c(A, \psi). \end{aligned}$$

Далее,

$$c(\operatorname{conv} A, \psi) = \sup_{m \geq 0} c(F_m, \psi) = \sup_{m \geq 0} c(A, \psi) = c(A, \psi).$$

□

Пример 9. Найдем опорную функцию для сферы единичного радиуса:

$$S = \{x \in \mathbf{E}^n : \|x\| = 1\}.$$

Очевидно, для любого вектора ψ максимум скалярного произведения

$$\langle x, \psi \rangle = \|x\| \cdot \|\psi\| \cdot \cos \alpha$$

будет достигаться на векторах, коллинеарных ψ , и будет равен (так как $\|x\| = 1$)

$$c(S, \psi) = \|\psi\|.$$

Раньше мы уже искали опорную функцию для шара (см. пример 7), поэтому

$$c(S_1(0), \psi) = \|\psi\|.$$

Заметим, что опорные функции для сферы S и ее минимальной выпуклой оболочки — шара $S_1(0)$ — совпадают, что наглядно демонстрирует свойство 7.

+Рисунок.

Покажем теперь, как, используя данное свойство, можно упростить нахождение опорной функции.

Пример 10. Найдем теперь опорную функцию для множества $A = \{v, -v\}$, где $v \in \mathbf{E}^n$.

$$c(A, \psi) = \max(\langle \psi, v \rangle, \langle \psi, -v \rangle) = |\langle \psi, v \rangle|.$$

Заметим, что согласно седьмому свойству опорная функция для отрезка $[v, -v]$, который является минимальной выпуклой оболочкой множества A будет такой же:

$$c([-v, v], \psi) = c(\operatorname{conv} A, \psi) = |\langle \psi, v \rangle|.$$

Пример 11. Пусть множество A состоит из четырех точек:

$$A = \{(1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)\}.$$

В примере 8 мы уже искали опорную функцию для минимальной выпуклой оболочки множества A (это квадрат с такими же координатами вершин). Поэтому

$$c(A, \psi) = c(\operatorname{conv} A, \psi) = \|\psi_1\| + \|\psi_2\|$$

+ Рисунок

Пример 12. Эллипсоид:

$$\mathcal{E} = \left\{ x \in \mathbf{E}^n : \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \cdots + \frac{x_n^2}{a_n^2} \leq 1 \right\}.$$

Можно записать по-другому: $\mathcal{E} = L \cdot S_1(0)$, где

$$L = \begin{pmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{pmatrix};$$

Так как $L^* = L$, то, согласно свойству 4,

$$c(\mathcal{E}, \psi) = c(L \cdot S_1(0), \psi) = c(S_1(0), L\psi) = \|L\psi\| = \sqrt{a_1^2 \psi_1^2 + a_2^2 \psi_2^2 + \cdots + a_n^2 \psi_n^2}$$

Пример 13. Построим опорную функцию для произвольного шара:

$$A = S_R(a) = \{a\} + R \cdot S_1(0)$$

$$c(A, \psi) = c(a + R \cdot S_1(0), \psi) \stackrel{\text{CB-BO}}{=} \frac{1}{5} c(\{a\}, \psi) + R \cdot c(S_1(0), \psi) = \langle a, \psi \rangle + R \cdot \|\psi\|.$$

+какие-то рисунки

Теорема 2. Пусть A — компакт, тогда

$$\text{conv } A = \bigcap_{\psi \in S} \{x \in \mathbf{E}^n : \langle x, \psi \rangle \leq c(A, \psi)\}.$$

Доказательство. Введем обозначение:

$$\Pi_\psi = \{x \in \mathbf{E}^n : \langle x, \psi \rangle \leq c(A, \psi)\};$$

тогда утверждение теоремы можно переформулировать, как

$$\text{conv } A = \bigcap_{\psi \in S} \Pi_\psi.$$

Для доказательства равенства двух множеств покажем, что имеет место вложение одного множества в другое и наоборот.

Возьмем любое a из $\text{conv } A$ и любое ненулевое $\psi \in \mathbf{E}^n$. Имеем:

$$\langle a, \psi \rangle \leq \max_{a \in \text{conv } A} \langle a, \psi \rangle = c(\text{conv } A, \psi) \stackrel{\text{CB-BO } 7}{=} c(A, \psi) \Rightarrow$$

$$a \in \Pi_\psi \ (\forall \psi) \Rightarrow \text{conv } A \subseteq \bigcap_{\psi \in S} \Pi_\psi.$$

Теперь покажем вложение в другую сторону:

$$\text{conv } A \supseteq \bigcap_{\psi \in S} \Pi_\psi.$$

Предположим противное, то есть $\exists x_0 \in \Pi_\psi$ для любого $\psi \in S$, но $x_0 \notin \text{conv } A$. По лемме об отделимости найдется вектор $\psi_0 \in \mathbf{E}^n$ такой, что $\langle a - x_0, \psi_0 \rangle < 0$ для любого a из $\text{conv } A$. Разбив в скалярном произведении первый множитель на два слагаемых получим:

$$\langle a, \psi_0 \rangle < \langle x_0, \psi_0 \rangle \ (\forall a) \Rightarrow \max_{a \in \text{conv } A} \langle a, \psi_0 \rangle < \langle x_0, \psi_0 \rangle$$

$$c(\text{conv } A, \psi_0) < \langle x_0, \psi_0 \rangle \Leftrightarrow c(A, \psi_0) < \langle x_0, \psi_0 \rangle.$$

Но, так как

$$x_0 \in \bigcap_{\psi \in S} \Pi_\psi,$$

то

$$\begin{aligned} \left\langle x_0, \frac{\psi_0}{\|\psi_0\|} \right\rangle &\leq c\left(A, \frac{\psi_0}{\|\psi_0\|}\right) \stackrel{\text{CB-BO } 4}{\Rightarrow} \\ \frac{1}{\|\psi_0\|} \langle x_0, \psi_0 \rangle &\leq \frac{1}{\|\psi_0\|} c(A, \psi_0) \Rightarrow \langle x_0, \psi_0 \rangle \leq c(A, \psi_0). \end{aligned}$$

Таким образом мы пришли к противоречию, что доказывает ложность нашего предположения. $\square$

Согласно теореме 2 для выпуклого компакта A справедливо представление

$$A = \bigcap_{\psi \in S} \{x \in \mathbf{E}^n : \langle x, \psi \rangle \leq c(A, \psi)\};$$

то есть по опорной функции можно восстановить выпуклое множество.

8. Если $A_1 \subseteq A_2$, то $c(A_1, \psi) \leq c(A_2, \psi)$ для любого $\psi \in \mathbf{E}^n$, а из этого условия, в свою очередь следует, что $\text{conv } A_1 \subseteq \text{conv } A_2$.

Доказательство.

$$c(A_1, \psi) = \max_{a \in A_1} \langle a, \psi \rangle \leq \max_{a \in A_2} \langle a, \psi \rangle = c(A_2, \psi).$$

Отсюда получаем:

$$\underbrace{\bigcap_{\psi \in S} \{x \in \mathbf{E}^n : \langle x, \psi \rangle \leq c(A_1, \psi)\}}_{\text{conv } A_1} \subseteq \underbrace{\bigcap_{\psi \in S} \{x \in \mathbf{E}^n : \langle x, \psi \rangle \leq c(A_2, \psi)\}}_{\text{conv } A_2}$$

□

Следствие. Если A_1, A_2 — выпуклые множества, то верны и обратные импликации:

$$A_1 \subseteq A_2 \Leftrightarrow c(A_1, \psi) \leq c(A_2, \psi) \Leftrightarrow \underbrace{\text{conv } A_1}_{=A_1} \subseteq \underbrace{\text{conv } A_2}_{=A_2} \quad \forall \psi \in \mathbf{E}^n$$

9. Если $a \in A$, то $a \in \text{conv } A$. Так как $a \in A$, то

$$\langle a, \psi \rangle \leq c(A, \psi) \quad \forall \psi \in S \Rightarrow a \in \text{conv } A.$$

Иначе, можно положить $A_1 = \{a\}$, $A_2 = A$, тогда будет выполняться $A_1 \subseteq A_2$. Воспользовавшись свойством 8, мы сразу приходим к нашему утверждению.

Следствие. Если A — выпуклый компакт ($A \in \text{conv } \Omega(\mathbf{E}^n)$), то

$$a \in A \Leftrightarrow \langle a, \psi \rangle \leq c(A, \psi) \quad \forall \psi \in S.$$

10. Если $0 \in A$, то $c(A, \psi) \geq 0$ для любого $\psi \in S$, а значит $0 \in \text{conv } A$. Это свойство является прямым следствием свойства 9: достаточно положить $a = 0$.

Следствие. Если A — выпуклый компакт, то условия $0 \in A$ и

$$c(A, \psi) \geq 0 \quad \forall \psi \in S$$

эквивалентны.

Следствие. Если A — выпуклый компакт, то следующие два условия эквивалентны:

$$0 \in \text{int } A \iff c(A, \psi) > 0 \quad \forall \psi \in S.$$

11. Если A и B — компакты, причем $A \cap B \neq \emptyset$, то

$$c(A, \psi) + c(B, -\psi) \geq 0 \quad \forall \psi \in S,$$

а из этого условия, в свою очередь следует, что

$$\text{conv } A \cap \text{conv } B \neq \emptyset$$

Доказательство. Так как пересечение множеств A и B непусто, то найдется элемент f , содержащийся и в том, и в другом множестве. В таком случае

$$-f \in -B \Rightarrow f + (-f) \in A + (-B) \Rightarrow 0 \in A + (-B) \xrightarrow[\forall \psi \in \mathbf{E}^n]{\text{CB-BQ}}^{10}$$

$$c(A + (-B), \psi) \geq 0 \Rightarrow c(A, \psi) + c(-B, \psi) = c(A, \psi) + c(B, -\psi) \geq 0;$$

из последнего неравенства, согласно свойству 7, получаем:

$$c(\text{conv } A, \psi) + c(\text{conv } B, -\psi) \geq 0 \xrightarrow{\text{CB-BA}}^{4,5} c(\text{conv } A + (-\text{conv } B), \psi) \geq 0 \xrightarrow{\text{CB-BQ}}^{10}$$

$$0 \in \text{conv } A + (-\text{conv } B) \Leftrightarrow \text{conv } A \cap \text{conv } B \neq \emptyset.$$

□

Следствие. Если A и B — выпуклые компакты, то

$$A \cap B \neq \emptyset \iff c(A, -\psi) + c(B, \psi) \geq 0 \quad \forall \psi \in S.$$

Пример 14. Пусть $A = S$, $B = S_\varepsilon(0)$ (шар радиуса ε , где $\varepsilon < 1$). Тогда:

$$c(S, \psi) + c(S_\varepsilon(0), -\psi) = \|\psi\| + \varepsilon \cdot \|\psi\| = (1 + \varepsilon)\|\psi\| > 0 \quad \forall \psi \neq 0.$$

Значит $S \cap S_\varepsilon(0) = \emptyset$.

12. $|c(A_1, \psi) - c(A_2, \psi)| \leq \|\psi\| \cdot h(A_1, A_2)$.

Доказательство. Из определения расстояния Хаусдорфа следует, что

$$A_1 \subseteq A_2 + S_{h(A_1, A_2)}(0);$$

но тогда, в силу свойства 8,

$$c(A_1, \psi) \leq c(A_2 + S_{h(A_1, A_2)}(0), \psi) \quad \forall \psi \neq 0 \xrightarrow{\text{CB-BQ}}^5 c(A_1, \psi) \leq$$

$$\leq c(A_2, \psi) + c(S_{h(A_1, A_2)}(0), \psi) = c(A_2, \psi) + h(A_1, A_2) \cdot \|\psi\|;$$

то есть $c(A_1, \psi) - c(A_2, \psi) \leq h(A_1, A_2) \cdot \|\psi\|$. Аналогично:

$$A_2 \subseteq A_1 + S_{h(A_1, A_2)}(0);$$

следовательно $c(A_2, \psi) - c(A_1, \psi) \leq h(A_1, A_2) \cdot \|\psi\|$. Вместо двух вышеуказанных неравенств получаем одно с модулем:

$$|c(A_1, \psi) - c(A_2, \psi)| \leq \|\psi\| \cdot h(A_1, A_2).$$

□

13. Пусть A, B — выпуклые компакты. Тогда

$$h(A, B) = \max_{\psi \in S} |c(A, \psi) - c(B, \psi)|.$$

Доказательство. Введем обозначение

$$M = \max_{\psi \in S} |c(A, \psi) - c(B, \psi)|$$

Согласно свойству 12 имеем:

$$|c(A, \psi) - c(B, \psi)| \leq \|\psi\| \cdot h(A, B).$$

Значит для любого ψ из единичной сферы S имеет место неравенство:

$$|c(A, \psi) - c(B, \psi)| \leq h(A, B);$$

$$\max_{\psi \in S} |c(A, \psi) - c(B, \psi)| \leq h(A, B) \Rightarrow M \leq h(A, B).$$

В то же время

$$M \geq |c(A, \psi) - c(B, \psi)| \quad \forall \psi \in S \Rightarrow$$

$$M \geq \left| c\left(A, \underbrace{\frac{\psi}{\|\psi\|}}_{\in S}\right) - c\left(B, \underbrace{\frac{\psi}{\|\psi\|}}_{\in S}\right) \right| \quad \forall \psi \in \mathbf{E}^n;$$

$$M \geq \left| \frac{1}{\|\psi\|} c(A, \psi) - \frac{1}{\|\psi\|} c(B, \psi) \right| = \frac{1}{\|\psi\|} |c(A, \psi) - c(B, \psi)| \quad \forall \psi \in \mathbf{E}^n;$$

$$|c(A, \psi) - c(B, \psi)| \leq M \cdot \|\psi\|;$$

$$-M \cdot \|\psi\| \leq c(A, \psi) - c(B, \psi) \leq M \cdot \|\psi\| \quad \forall \psi \in \mathbf{E}^n.$$

Из правого неравенства получаем:

$$c(A, \psi) \leq c(B, \psi) + M \cdot \|\psi\| \xrightarrow{\text{CB-WQ}}^8 A \subseteq B + S_M(0);$$

а из левого аналогичным образом:

$$c(B, \psi) \leq c(A, \psi) + M \cdot \|\psi\| \xrightarrow{\text{CB-WQ}}^8 B \subseteq A + S_M(0);$$

значит $h(A, B) \leq M$. Выше мы показали, что также $M \leq h(A, B)$, а такое возможно только при $M = h(A, B)$. $\square$

2 Многозначные отображения

Определение 14. Многозначным отображением $F(t)$ называется функция

$$F(t) : \mathbb{R}^1 \longrightarrow \Omega(\mathbf{E}^n).$$

Пример 15. Многозначным отображением является функция

$$F(t) = S_{|t|}(2t)$$

+Рисунок

Определение 15. Многозначное отображение $F(t)$ непрерывно в точке t_0 , если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ (возможно зависящее от ε) такое, что при $|t - t_0| < \delta$ будет выполняться $h(F(t), F(t_0)) < \varepsilon$, или, что то же самое,

$$|t - t_0| < \delta \Rightarrow \begin{cases} F(t) \subseteq F(t_0) + S_\varepsilon(0) \\ F(t_0) \subseteq F(t) + S_\varepsilon(0) \end{cases}.$$

Пример 16. Следующее отображение непрерывно:

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ t \cdot \{-1, 1\}, & t > 0. \end{cases}$$

Достаточно в определении взять $\delta = \varepsilon$.

Лемма 3. Если многозначное отображение $F(t)$ непрерывно по t , то опорная функция $c(F(t), \psi)$ непрерывна по t равномерно по всем $\psi \in S$, а в этом случае $\text{conv } F(t)$ будет непрерывно по t .

Непрерывность опорной функции равномерно по любому $\psi \in S$ означает, что в выражении $|t - t_0| < \delta$ величина δ одна и та же для всех $\psi \in S$ (не зависит от ψ).

Доказательство. Пусть $F(t)$ непрерывно по t . Тогда, согласно свойству 12,

$$|c(F(t), \psi) - c(F(t_0), \psi)| \leq h(F(t), F(t_0)) \cdot \|\psi\| \underset{\psi \in S}{=} h(F(t), F(t_0)).$$

В силу непрерывности $F(t)$ величина $h(F(t), F(t_0))$ для всех $\psi \in S$ стремится к нулю при $t \rightarrow t_0$. Заметим также, что написанное выше неравенство является условием Липшица по $F(t)$ с коэффициентом $\|\psi\| = 1$. Непрерывность $c(F(t), \psi)$ по t равномерно по всем $\psi \in S$ доказана.

Пусть теперь $c(F(t), \psi)$ непрерывна по t равномерно по всем $\psi \in S$. Согласно свойству 13

$$\begin{aligned} h(\operatorname{conv} F(t), \operatorname{conv} F(t_0)) &= \max_{\psi \in S} |c(\operatorname{conv} F(t), \psi) - c(\operatorname{conv} F(t_0), \psi)| \stackrel{\text{CB-BO } 7}{=} \\ &= \max_{\psi \in S} |c(F(t), \psi) - c(F(t_0), \psi)|. \end{aligned}$$

Величина, стоящая под максимумом при всех $\psi \in S$ стремится к нулю при $t \rightarrow t_0$ в силу непрерывности опорной функции по t . Отсюда по определению непрерывности получаем, что $\operatorname{conv} F(t)$ — непрерывное многозначное отображение. $\square$

Замечание. Рассуждения во второй части доказательства леммы можно проделать и в обратную сторону: если $\operatorname{conv} F(t)$ — непрерывное отображение, то $c(F(t), \psi)$ непрерывна.

Лемма 4. Для того, чтобы выпуклое многозначное отображение $F(t)$ было непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы опорная функция $c(F(t), \psi)$ была непрерывной при каждом фиксированном $\psi \in \mathbf{E}^n$.

Доказательство. В лемме 3 было показано, что $\operatorname{conv} F(t)$ непрерывна тогда и только тогда, когда $c(F(t), \psi)$ непрерывна по t равномерно по всем $\psi \in S$.

Покажем, что следующие два факта эквивалентны:

- $c(F(t), \psi)$ непрерывна по t равномерно по всем $\psi \in S$ и
- $c(F(t), \psi)$ непрерывна по t при каждом фиксированном $\psi \in \mathbf{E}^n$.

Докажем, что из первого утверждения следует второе. Пусть известно, что

$$|c(F(t), \psi) - c(F(t_0), \psi)| < \varepsilon \quad \forall \psi \in S, \text{ при } |t - t_0| < \delta. \quad (1)$$

Фиксируем произвольное $\psi_0 \in \mathbf{E}^n$. По следствию из свойства 4 имеем:

$$|c(F(t), \psi_0) - c(F(t_0), \psi_0)| = \|\psi_0\| \cdot \left| c\left(F(t), \frac{\psi_0}{\|\psi_0\|}\right) - c\left(F(t_0), \frac{\psi_0}{\|\psi_0\|}\right) \right|;$$

при этом $\frac{\psi_0}{\|\psi_0\|} \in S$, и из определения (1) непрерывности $c(F(t), \psi)$ по t равномерно по всем $\psi \in S$ вытекает, что

$$\|\psi_0\| \cdot \left| c\left(F(t), \frac{\psi_0}{\|\psi_0\|}\right) - c\left(F(t_0), \frac{\psi_0}{\|\psi_0\|}\right) \right| < \varepsilon \cdot \|\psi_0\|, \text{ при } |t - t_0| < \delta;$$

(здесь уже существенно то, что вектор ψ зафиксирован).

Покажем теперь, что верно и обратное: из непрерывности $c(F(t), \psi)$ при любом фиксированном $\psi \in \mathbf{E}^n$ следует непрерывность $c(F(t), \psi)$ по t равномерно по всем $\psi \in S$. Предположим, что это не так, то есть существует такая последовательность $\{t_k\}$, сходящаяся к некоторому t_0 , что для любого ψ из S :

$$|c(F(t_k), \psi) - c(F(t_0), \psi)| > r > 0 \quad (2)$$

для всех k больших некоторого K . Воспользуемся тем, что сфера — компакт. Без ограничения общности будем считать, что $\psi_k \rightarrow \psi_0$ при $k \rightarrow \infty$, причем ψ_0 лежит в S (в силу компактности сферы).

$$\begin{aligned} & |c(F(t_k), \psi) - c(F(t_0), \psi)| = \\ & = |c(F(t_k), \psi_k) - c(F(t_k), \psi_0) + c(F(t_k), \psi_0) - c(F(t_0), \psi_0) + \\ & \quad + c(F(t_0), \psi_0) - c(F(t_0), \psi_k)| \leq \\ & \leq |c(F(t_k), \psi_k) - c(F(t_k), \psi_0)| + |c(F(t_k), \psi_0) - c(F(t_0), \psi_0)| + \\ & \quad + |c(F(t_0), \psi_0) - c(F(t_0), \psi_k)| \underset{\substack{\text{усл. Липшица по} \\ \text{2-ому аргументу}}}{\leq} \\ & \leq |F(t_k)| \cdot \|\psi_k - \psi_0\| + |c(F(t_k), \psi_0) - c(F(t_0), \psi_0)| + |F(t_0)| \cdot \|\psi_k - \psi_0\| \quad (3) \end{aligned}$$

Второе слагаемое $|c(F(t_k), \psi_0) - c(F(t_0), \psi_0)|$ в силу непрерывности опорной функции при фиксированном ψ_0 стремится к нулю при $t_k \rightarrow t_0$. В третьем слагаемом

$F(t_0)$ представляет собой фиксированный компакт, следовательно его модуль $|F(t_0)|$ ограничен, а $\|\psi_k - \psi_0\| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, поэтому всё слагаемое стремится к нулю. В первом слагаемом также $\|\psi_k - \psi_0\| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Покажем, что $F(t_k)$ ограничен при всех k . Предположим противное: $F(t_k) \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$.

$$|F(t_k)| = \min_{r>0} \{r : F(t_k) \subseteq S_r(0)\} = \\ = \min_{r>0} \{r : c(F(t_k), \psi) \leq r \ \forall \psi \in S\} = \max_{\psi \in S} c(F(t_k), \psi) \quad (4)$$

Так как $F(t_k)$ является компактом при любом k , то максимум достигается при каком-то $\varphi_0 \in S$. Возьмем произвольную последовательность $\{\varphi_k\}$, лежащую в S и сходящуюся к φ_0 :

$$c(F(t_k), \varphi_k) - c(F(t_k), \varphi_0) \stackrel{\text{св-во 3}}{\leq} |F(t_k)| \cdot \|\varphi_k - \varphi_0\| \stackrel{(4)}{=} c(F(t_k), \varphi_k) \cdot \|\varphi_k - \varphi_0\| \implies \\ c(F(t_k), \varphi_k) \cdot \underbrace{(1 - \|\varphi_k - \varphi_0\|)}_{\rightarrow 1} \leq c(F(t_k), \varphi_0)$$

По нашему предположению $|F(t_k)|$ стремится к бесконечности при $k \rightarrow \infty$, а значит и $c(F(t_k), \psi) \rightarrow \infty$, и вся левая часть неравенства стремится к бесконечности при $k \rightarrow \infty$. В то же время функция $c(F(t_k), \psi_0)$ непрерывна при фиксированном ψ_0 , поэтому ограничена на множестве значений $\{t_k\}$. Мы приходим к противоречию, из-за чего наше предположение о неограниченности $F(t_k)$ неверно. Но в этом случае в выражении (3) каждое из трех слагаемых стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$, поэтому условие (2) нарушения непрерывности оказывается невыполненным, и мы приходим ко второму противоречию. Значит наше изначальное предположение о том, что функция $c(F(t_k), \psi)$ не является непрерывной по t равномерно по всем $\psi \in S$ неверно и лемма полностью доказана. $\square$

Определение 16. Многозначное отображение $F(t) : \mathbb{R}^1 \longrightarrow \Omega(\mathbf{E}^n)$ называется измеримым, если для любого $\varepsilon > 0$ и любого компакта K множество

$$\{t : h(F(t), K) < \varepsilon\}$$

измеримо по Лебегу.

Лемма 5. Если множество $F(t)$ измеримо, то $c(F(t), \psi)$ — измеримая функция для любого $\psi \in \mathbf{E}^n$ и обратно: если $c(F(t), \psi)$ — измеримая функция для любого $\psi \in \mathbf{E}^n$, то множество $\text{conv } F(t)$ измеримо.

Примем данную лемму без доказательства.

Определение 17. Функция $f(t) : \mathbb{R}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^n$ называется *однозначной ветвью* многозначного отображения $F(t) : \mathbb{R}^1 \longrightarrow \Omega(\mathbb{R}^n)$, если для любого t верно $f(t) \in F(t)$.

Пример 17. Пусть многозначное отображение задано формулой

$$F(t) = t \cdot \{-1, 1\}.$$

Тогда функции $f(t) = t$, $f(t) = -t$, $f(t) = |t|$ будут однозначными ветвями данного многозначного отображения. Ветвь может быть и разрывной, например:

$$f(t) = \begin{cases} t, & t \geq \frac{1}{2}, \\ -t, & t < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Определение 18. Зафиксируем вектор $\psi_0 \neq 0$ и компакт A . Для произвольного вектора назовем величину

$$c'(A, \psi_0; \psi) = \lim_{\alpha \rightarrow +0} \underbrace{\left\{ \frac{c(A, \psi_0 + \alpha\psi) - c(A, \psi_0)}{\alpha} \right\}}_{S_\alpha}$$

производной опорной функции $c(A, \psi_0)$ по направлению ψ .

Покажем, что последовательность $\{S_\alpha\}$ сходится (чтобы показать корректность определения производной).

$$\begin{aligned} c(A, \psi_0) &= c(A, \psi_0 + \alpha\psi - \alpha\psi) \stackrel{\text{св-во 2}}{\leq} \\ &\leq c(A, \psi_0 + \alpha\psi) + c(A, -\alpha\psi) = c(A, \psi_0 + \alpha\psi) + \alpha c(A, -\psi); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{c(A, \psi_0 + \alpha\psi) - c(A, \psi_0)}{\alpha} &\geq \\ &\geq \frac{c(A, \psi_0 + \alpha\psi) - c(A, \psi_0 + \alpha\psi) - \alpha c(A, -\psi)}{\alpha} = c(A, -\psi); \end{aligned}$$

откуда получаем, что последовательность $\{S_\alpha\}$ ограничена снизу.

Докажем монотонное убывание. Берем числа α_1 и α_2 такие, что $0 < \alpha_2 < \alpha_1$. Пусть $\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \lambda$. Тогда $1 - \lambda = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1}$. Обозначим также

$$\begin{aligned} x_1 &= \psi_0 + \alpha_1\psi, \\ x_2 &= \psi_0; \end{aligned}$$

получаем:

$$\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}(\psi_0 + \alpha_1\psi) + \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1}\psi_0 = \psi_0 + \alpha_2\psi.$$

$$\begin{aligned} c(A, \psi_0 + \alpha_2\psi) &= c(A, \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda \cdot c(A, \psi_0 + \alpha_1\psi) + (1 - \lambda) \cdot c(A, \psi_0) = \\ &= \frac{\alpha_2}{\alpha_1} c(A, \psi_0 + \alpha_1\psi) + \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1} c(A, \psi_0); \\ c(A, \psi_0 + \alpha_2\psi) &\leq \frac{\alpha_2}{\alpha_1} c(A, \psi_0 + \alpha_1\psi) + c(A, \psi_0) - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} c(A, \psi_0). \end{aligned}$$

Вычтем из обеих частей этого неравенства $c(A, \psi_0)$ и разделим на α_2 .

$$\frac{c(A, \psi_0 + \alpha_2\psi) - c(A, \psi_0)}{\alpha_2} \leq \frac{c(A, \psi_0 + \alpha_1\psi) - c(A, \psi_0)}{\alpha_1}.$$

Следовательно последовательность $\{S_\alpha\}$ невозрастает при $\alpha \rightarrow +0$, так как $S_{\alpha_2} \leq S_{\alpha_1}$ при $\alpha_2 < \alpha_1$, и, по доказанному, ограничена снизу, а значит при любом ψ имеет предел.

Итак, определение производной корректно. Покажем, что введенная таким образом функция обладает положительной однородностью и полуаддитивностью по второму аргументу, то есть

- $c'(A, \psi_0; \lambda\psi) = \lambda \cdot c'(A, \psi_0; \psi)$ для любого $\lambda \geq 0$;
- $c'(A, \psi_0; \psi_1 + \psi_2) \leq c'(A, \psi_0; \psi_1) + c'(A, \psi_0; \psi_2)$ для произвольных $\psi_1, \psi_2 \in \mathbf{E}^n$.

Положительная однородность:

$$c'(A, \psi_0; \lambda\psi) = \lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{c(A, \psi_0 + \alpha\lambda\psi) - c(A, \psi_0)}{\alpha}$$

Домножим и разделим выражение под знаком предела на λ и введем новую переменную $\beta = \alpha\lambda$:

$$\begin{aligned} \lambda \cdot \lim_{\lambda\alpha \rightarrow +0} \frac{c(A, \psi_0 + \alpha\lambda\psi) - c(A, \psi_0)}{\lambda\alpha} &= \lambda \cdot \lim_{\beta \rightarrow +0} \frac{c(A, \psi_0 + \beta\psi) - c(A, \psi_0)}{\beta} = \\ &= \lambda \cdot c'(A, \psi_0; \psi). \end{aligned}$$

Полуаддитивность:

$$c'(A, \psi_0; \psi_1 + \psi_2) = \lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{c(A, \psi_0 + \alpha(\psi_1 + \psi_2)) - c(A, \psi_0)}{\alpha} =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\frac{\alpha}{2} \rightarrow +0} \frac{c(A, \psi_0 + \frac{\alpha}{2}(\psi_1 + \psi_2)) - c(A, \psi_0)}{\frac{\alpha}{2}} = \\
&= \lim_{\frac{\alpha}{2} \rightarrow +0} \frac{c(A, \frac{1}{2}(\psi_0 + \alpha\psi_1) + \frac{1}{2}(\psi_0 + \alpha\psi_2)) - c(A, \psi_0)}{\frac{\alpha}{2}} \stackrel{\text{CB-BO 2}}{\leq} \stackrel{\text{CB-BO 4}}{\leq} \\
&\leq \lim_{\frac{\alpha}{2} \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{2}c(A, \psi_0 + \alpha\psi_1) + \frac{1}{2}c(A, \psi_0 + \alpha\psi_2) - c(A, \psi_0)}{\frac{\alpha}{2}} = \\
&= \lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{c(A, \psi_0 + \alpha\psi_1) + c(A, \psi_0 + \alpha\psi_2) - 2c(A, \psi_0)}{\alpha} = \\
&= \lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{c(A, \psi_0 + \alpha\psi_1) - c(A, \psi_0)}{\alpha} + \lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{c(A, \psi_0 + \alpha\psi_2) - c(A, \psi_0)}{\alpha} = \\
&= c'(A, \psi_0; \psi_1) + c'(A, \psi_0; \psi_2).
\end{aligned}$$

Теорема 3 (о существовании однозначной измеримой ветви). Пусть многозначное отображение $F(t) : \mathbb{R}^1 \rightarrow \Omega(\mathbf{E}^n)$ измеримо. Тогда существует измеримая однозначная ветвь $f(t)$, причем для любого $\psi_0 \neq 0$ эту ветвь можно выбрать так, что $f(t) \in U(F(t), \psi_0)$.

Напомним, что опорное множество $U(A, \psi_0)$ представляет собой множество векторов из A , имеющих максимальную проекцию на вектор ψ_0 :

$$U(A, \psi_0) = \{a \in A : \langle a, \psi_0 \rangle = c(A, \psi_0)\}.$$

Очевидно, опорное множество $U(A, \psi_0)$ является подмножеством опорной гиперплоскости $\Gamma_{\psi_0} = \{x \in \mathbf{E}^n : \langle x, \psi_0 \rangle = c(A, \psi_0)\}$; и $U(A, \psi_0) = A \cap \Gamma_{\psi_0}$. В то же время

$$\text{conv } U(A, \psi_0) = \text{conv } A \cap \Gamma_{\psi_0}; \quad (5)$$

(см. рисунок), а также, в силу равенства $\text{conv } U(A, \psi_0) = \text{conv } (A \cap \Gamma_{\psi_0})$,

$$\text{conv } (A \cap \Gamma_{\psi_0}) = \text{conv } A \cap \Gamma_{\psi_0}. \quad (6)$$

Конечно же равенство 5 обосновано нестрого. Примем его на веру.

Лемма 6. Если выпуклая и конечная функция $f(\psi)$ обладает положительной однородностью, то есть $f(\alpha\psi) = \alpha f(\psi)$ при $\alpha \geq 0$, то $f(\psi)$ является опорной к некоторому выпуклому компакт.

Напомним, что выпуклой называется функция для которой выполняется неравенство

$$f(\psi_1 + \psi_2) \leq f(\psi_1) + f(\psi_2).$$

Доказательство. Покажем что множество

$$F = \bigcap_{\psi \in S} \{x : \langle x, \psi \rangle \leq f(\psi)\}$$

является искомым выпуклым компактом.

Возьмем произвольное $x \in F$. Для любого ненулевого $\psi \in \mathbf{E}^n$ будет выполняться неравенство

$$\left\langle x, \frac{\psi}{\|\psi\|} \right\rangle \leq f\left(\frac{\psi}{\|\psi\|}\right),$$

так как вектор $\frac{\psi}{\|\psi\|}$ содержится в S . Воспользовавшись однородностью функции $f(\psi)$, вынесем множитель $\frac{1}{\|\psi\|}$ из-под знака функции и из скалярного произведения:

$$\frac{1}{\|\psi\|} \langle x, \psi \rangle \leq \frac{1}{\|\psi\|} f(\psi);$$

$$\langle x, \psi \rangle \leq f(\psi);$$

значит $f(\psi)$ — опорная функция для множества F .

Покажем выпуклость этого множества. Пусть вектора x_1 и x_2 содержатся в F . Тогда, согласно определению выпуклости, каждый из векторов $b_\lambda = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$ (где $\lambda \in [0, 1]$) должен также содержаться в F .

$$\langle \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, \psi \rangle = \lambda \langle x_1, \psi \rangle + (1 - \lambda) \langle x_2, \psi \rangle \stackrel{x_1, x_2 \in F}{\leq} \lambda f(\psi) + (1 - \lambda)f(\psi) = f(\psi);$$

$$\frac{1}{\|\psi\|} \langle \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, \psi \rangle \leq \frac{1}{\|\psi\|} f(\psi);$$

$$\left\langle \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, \underbrace{\frac{\psi}{\|\psi\|}}_{\in S} \right\rangle \leq f\left(\underbrace{\frac{\psi}{\|\psi\|}}_{\in S}\right).$$

Итак, любой вектор b_λ содержится в F , тем самым выпуклость доказана. $\square$

Лемма 7. Пусть P — выпуклый компакт, причем $c(P, \psi) = c'(A, \psi_0; \psi)$. Тогда $P = \text{conv } U(A, \psi_0)$.

Доказательство. Фиксируем произвольное $x_0 \in \text{conv } U(a, \psi_0) = \text{conv } A \cap \Gamma_{\psi_0}$. Очевидно, x_0 содержится в Γ_{ψ_0} и $\text{conv } A$.

$$x_0 \in \Gamma_{\psi_0} \implies \langle x_0, \psi_0 \rangle = c(A, \psi_0);$$

далее, для любого $x_0 \in \text{conv } A \cap \Gamma_{\psi_0}$ и для любого направления ψ выполняется

$$\begin{aligned} \langle x_0, \psi \rangle &\leq c(\text{conv } A \cap \Gamma_{\psi_0}, \psi) \stackrel{(6)}{=} c(\text{conv}(A \cap \Gamma_{\psi_0}), \psi) = \\ &= c(A \cap \Gamma_{\psi_0}, \psi) \stackrel{A \cap \Gamma_{\psi_0} \subset A}{\leq} c(A, \psi). \end{aligned} \quad (7)$$

Используя эти два выражения, получаем:

$$\begin{aligned} \langle x_0, \psi \rangle &= \left\langle x_0, \frac{\lambda\psi}{\lambda} \right\rangle = \left\langle x_0, \frac{\psi_0 + \lambda\psi - \psi_0}{\lambda} \right\rangle = \frac{\langle x_0, \psi_0 + \lambda\psi \rangle - \langle x_0, \psi_0 \rangle}{\lambda} \leq \\ &\leq \frac{c(A, \psi_0 + \lambda\psi) - c(A, \psi_0)}{\lambda}; \end{aligned}$$

переходя к пределу при $\lambda \rightarrow +0$, получим:

$$\langle x_0, \psi \rangle \leq c'(A, \psi_0; \psi) \equiv c(P, \psi) \quad \forall \psi \in \mathbf{E}^n.$$

Согласно теореме 2, $x_0 \in \text{conv } P$, но, так как множество P по условию выпуклое, то $\text{conv } P = P$, то есть $x_0 \in P$, поэтому $P \supseteq \text{conv } U(A, \psi_0)$.

Фиксируем теперь произвольное x_0 из P . Покажем, что x_0 содержится в Γ_{ψ_0} и $\text{conv } A$.

$$\begin{aligned} \langle x_0, \psi_0 \rangle &\leq c(P, \psi_0) = c'(A, \psi_0; \psi_0) = \lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{c(A, \psi_0 + \alpha\psi_0) - c(A, \psi_0)}{\alpha} \stackrel{\text{сб-во 4}}{=} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{(1 + \alpha) \cdot c(A, \psi_0) - c(A, \psi_0)}{\alpha} = c(A, \psi_0); \\ \langle x_0, -\psi_0 \rangle &\leq c(P, -\psi_0) = c'(A, \psi_0; -\psi_0) = \lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{c(A, \psi_0 - \alpha\psi_0) - c(A, \psi_0)}{\alpha} = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{(1 - \alpha) \cdot c(A, \psi_0) - c(A, \psi_0)}{\alpha} = -c(A, \psi_0); \end{aligned}$$

или, что то же самое,

$$\begin{aligned} \langle x_0, \psi_0 \rangle &\geq c(A, \psi_0); \\ \left. \begin{aligned} \langle x_0, \psi_0 \rangle &\leq c(A, \psi_0) \\ \langle x_0, -\psi_0 \rangle &\geq c(A, \psi_0) \end{aligned} \right\} &\Rightarrow \langle x_0, \psi_0 \rangle = c(A, \psi_0); \end{aligned}$$

а это означает, что $x_0 \in \Gamma_{\psi_0}$.

Далее, для любого вектора $\psi \in \mathbf{E}^n$ выполняется

$$\begin{aligned} \langle x_0, \psi \rangle &\leq c(P, \psi) = c'(A, \psi_0; \psi) = \lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{c(A, \psi_0 + \alpha\psi) - c(A, \psi_0)}{\alpha} \stackrel{\text{св-во 2}}{\leq} \\ &\leq \lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{c(A, \psi_0) + \alpha c(A, \psi) - c(A, \psi_0)}{\alpha} = c(A, \psi); \end{aligned}$$

а значит, по теореме 2, $x_0 \in \text{conv } A$. Окончательно, $x_0 \in \text{conv } A \cap \Gamma_{\psi_0}$ и

$$p \subseteq \text{conv } U(A, \psi_0).$$

Двустороннее вложение множеств друг в друга и означает их равенство. $\square$

Доказательство теоремы. Выберем в пространстве $\mathbf{E}^n$ базис $e_1, \dots, e_n$ таким образом, чтобы $e_1 = \psi_0$. Построим цепочку множеств $U_i(t)$ согласно следующему правилу:

$$\begin{aligned} U_0(t) &= F(t); \\ U_1(t) &= U(U_0(t), e_1); \\ &\vdots \\ U_k(t) &= U(U_{k-1}(t), e_k); \\ &\vdots \\ U_n(t) &= U(U_{n-1}(t), e_n); \end{aligned}$$

Ранее в лемме 6 мы показали, что однородная и выпуклая функция является опорной для некоторого множества. Производная $c'(A, \psi_0; \psi)$ опорной функции обладает этими свойствами. Пусть функция $c'(U_{i-1}(t), e_i; \psi)$ является опорной к некоторому множеству P , то есть $c'(U_{i-1}(t), e_i; \psi) = c(P, \psi)$. Тогда, по лемме, 7

$$P = \text{conv } U(U_{i-1}, \psi) = \text{conv } U_i.$$

Из того, как мы ввели множества U_k ($k = 1, 2, \dots, n$) следует, что

$$c'(U_{i-1}(t), e_i; \psi) = c(\text{conv } U_i, \psi) = c(U_i, \psi).$$

По определению производной:

$$c'(U_{i-1}(t), e_i; \psi) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{c(U_{i-1}(t), e_i + \alpha\psi) - c(U_{i-1}(t), e_i)}{\alpha} = c(U_i, \psi).$$

Каждая опорная функция $c(U_{i-1}, \psi)$ измерима, значит и предел при $\alpha \rightarrow 0$ представляет собой измеримую функцию, равную $c(U_i, \psi)$. Поэтому при $i = 1, 2, \dots, n$ множества $\text{conv } U_i(t)$, (а следовательно и U_i) будут измеримыми.

Множества $U_n(t)$ вложены друг в друга:

$$U_n(t) \subseteq U_{n-1} \subseteq \dots \subseteq U_0(t) \equiv F(t), \quad (8)$$

потому как опорное множество $U(A, \psi_0)$ является подмножеством множества A для любых A и ψ_0 . Кроме того, размерность каждого $U_i(t)$ не превосходит $n - i$:

$$\begin{aligned} \dim U_1(t) &\leq n - 1; \\ &\vdots \\ \dim U_i(t) &\leq n - i; \\ &\vdots \\ \dim U_n(t) &\leq 0 \implies U_n(t) = \{f(t)\}; \end{aligned}$$

Из вложенности (8) следует, что $f(t) \subset F(t)$ при любом t , а так как каждое из $U_i(t)$ измеримо, то и $f(t) = U_n(t)$ также измеримо. $f(t)$ является измеримой однозначной ветвью. Теорема доказана. $\square$

При доказательстве леммы 7 мы пользовались равенством

$$c(A \cap \Gamma_{\psi_0}, \psi) = c(\text{conv } A \cap \Gamma_{\psi_0}, \psi) \quad \forall \psi \neq 0;$$

которое вытекает из равенства (5). Обоснуем этот переход более строго.

Ранее в теореме (1) было показано, что для минимальной выпуклой оболочки множества A справедливо представление

$$\text{conv } A = \bigcup_{m \geq 0} A_m, \quad \text{где } A_0 = A, \quad A_{m+1} = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \{\lambda A_m + (1 - \lambda)A_m\};$$

поэтому

$$\begin{aligned} c(\text{conv } A \cap \Gamma_{\psi_0}, \psi) &= c\left(\left(\bigcup_{m \geq 0} A_m\right) \cap \Gamma_{\psi_0}, \psi\right) = c\left(\bigcap_{m \geq 0} \{A_m \cap \Gamma_{\psi_0}\}, \psi\right) \stackrel{\text{св-во 6}}{=} \\ &= \sup_{m \geq 0} c(A_m \cap \Gamma_{\psi_0}, \psi) \end{aligned} \quad (9)$$

Покажем, что для при любом m выполняется равенство

$$c(A_m \cap \Gamma_{\psi_0}, \psi) = c(A \cap \Gamma_{\psi_0}, \psi). \quad (10)$$

При $m = 0$ выражение (10) обращается в тождество, так как $A_0 = A$. Пусть утверждение верно при некотором k , тогда

$$\begin{aligned} c(A_{k+1} \cap \Gamma_{\psi_0}, \psi) &= c\left(\bigcup_{\lambda \in [0,1]} \{\lambda A_k + (1 - \lambda)A_k\} \cap \Gamma_{\psi_0}, \psi\right) = \\ &= c\left(\bigcup_{\lambda \in [0,1]} \{\{\lambda A_k + (1 - \lambda)A_k\} \cap \Gamma_{\psi_0}\}, \psi\right) = \\ &= \sup_{\lambda \in [0,1]} c(\{\lambda A_k + (1 - \lambda)A_k\} \cap \Gamma_{\psi_0}, \psi); \end{aligned} \quad (11)$$

Теперь покажем равенство множеств:

$$\{\lambda A + (1 - \lambda)A\} \cap \Gamma_{\psi_0} = \lambda A \cap \Gamma_{\psi_0} + (1 - \lambda)A \cap \Gamma_{\psi_0}.$$

Возьмем b из множества $\{\lambda A + (1 - \lambda)A\} \cap \Gamma_{\psi_0}$. Так как $b \in \Gamma_{\psi_0}$, то

$$\langle b, \psi_0 \rangle = c(A, \psi_0);$$

а из того, что $b \in \lambda A + (1 - \lambda)A$ следует:

$$b = \lambda a_1 + (1 - \lambda)a_2, \quad \text{где } a_1, a_2 \in A;$$

$$\langle b, \psi_0 \rangle = \lambda \langle a_1, \psi_0 \rangle + (1 - \lambda) \langle a_2, \psi_0 \rangle = c(A, \psi_0); \quad (12)$$

(последнее равенство — в силу того, что $b \in \Gamma_{\psi_0}$). Такое возможно только в том случае, если

$$\langle a_1, \psi_0 \rangle = c(A, \psi_0), \quad \langle a_2, \psi_0 \rangle = c(A, \psi_0).$$

Действительно, если хотя бы одно из скалярных произведений $\langle a_i, \psi_0 \rangle$ ($i = 1, 2$) меньше $c(A, \psi_0)$ (случай $\langle a_i, \psi_0 \rangle > c(A, \psi_0)$ вообще исключен), то

$$\langle b, \psi_0 \rangle < c(A, \psi_0),$$

а это невозможно в силу (12). Из первого равенства следует, что $a_1 \in \Gamma_{\psi_0}$, а из второго — $a_2 \in \Gamma_{\psi_0}$, а так как $a_1, a_2 \in A$, то $a_1 \in A \cap \Gamma_{\psi_0}$, $a_2 \in A \cap \Gamma_{\psi_0}$ и

$$\{\lambda A + (1 - \lambda)A\} \cap \Gamma_{\psi_0} \subseteq \lambda A \cap \Gamma_{\psi_0} + (1 - \lambda)A \cap \Gamma_{\psi_0}.$$

Пусть теперь $b \in \lambda A \cap \Gamma_{\psi_0} + (1 - \lambda)A \cap \Gamma_{\psi_0}$. Это означает, что его можно представить как

$$b = \lambda a_1 + (1 - \lambda)a_2, \quad \text{где } a_1, a_2 \in A \cap \Gamma_{\psi_0}.$$

Сразу видно, что $b \in \lambda A + (1 - \lambda)A$ (так как $a_1, a_2 \in A$). Кроме того

$$\langle b, \psi_0 \rangle = \lambda \langle a_1, \psi_0 \rangle + (1 - \lambda) \langle a_2, \psi_0 \rangle;$$

$$a_1, a_2 \in \Gamma_{\psi_0} \implies \langle a_1, \psi_0 \rangle = \langle a_2, \psi_0 \rangle = c(A, \psi_0) \implies \langle b, \psi_0 \rangle = c(A, \psi_0);$$

значит $b \in \Gamma_{\psi_0}$, то есть

$$\{\lambda A + (1 - \lambda)A\} \cap \Gamma_{\psi_0} \supseteq \lambda A \cap \Gamma_{\psi_0} + (1 - \lambda)A \cap \Gamma_{\psi_0}.$$

Таким образом, равенство множеств доказано.

Замечание. В общем случае равенство

$$(A + B) \cap C = A \cap C + B \cap C$$

неверно. Для примера возьмем $A = B = C = S_1(0)$. Тогда

$$\begin{aligned} (A + B) \cap C &= S_2(0) \cap S_1(0) = S_1(0); \\ A \cap C + B \cap C &= S_1(0) + S_1(0) = S_2(0). \end{aligned}$$

Теорема 4 (Ляпунова). Пусть множество G определяется следующим образом:

$$G = \int_{t_0}^{t_1} F(t) dt = \left\{ \int_{t_0}^{t_1} f(t) dt, \quad f(t) \in F(t) \quad \forall t \in I \right\},$$

где $I = [t_0, t_1]$; и пусть задано измеримое отображение

$$F(t) : I \longrightarrow \Omega(\mathbf{E}^n),$$

причем $|F(t)| \leq k(t)$, где $k(t)$ — некоторая суммируемая на I функция. Тогда:

- 1) $G \neq \emptyset$;
- 2) Множество G ограничено, то есть $\exists R > 0 : G \subseteq S_R(0)$;
- 3) Множество G замкнуто;
- 4) Множество G выпукло (то есть G — выпуклый компакт).

Доказательство. 1) Согласно условию, $F(t)$ измеримо, значит у этого отображения существует измеримая однозначная ветвь $f(t)$, причем

$$\|f(t)\| \leq |F(t)| \leq k(t).$$

Функция $\|f(t)\|$ не превосходит суммируемой функции $k(t)$, значит она тоже суммируема, то есть существует интеграл

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t) dt,$$

поэтому множество G непусто.

2) Из определения множества G следует, что для любого g из G существует представление

$$g = \int_{t_0}^{t_1} f(t) dt,$$

где $f(t)$ — некоторая однозначная ветвь отображения $F(t)$. Поэтому

$$\|g\| \leq \int_{t_0}^{t_1} \|f(t)\| dt \leq \int_{t_0}^{t_1} |F(t)| dt = \int_{t_0}^{t_1} k(t) dt \equiv R,$$

откуда $G \subseteq S_R(0)$.

Свойства 3) и 4) примем без доказательства. □

Пример 18. Пусть имеется отображение $F(t) : I \longrightarrow \Omega(\mathbb{R}^1)$, где $I = [0, 1]$, задаваемое формулой $F(t) = t \cdot \{-1, 1\}$. У этого отображения на отрезке I существуют две непрерывные ветви: $f(t) = t$ и $f(t) = -t$. Ясно, что минимальное и максимальное значение элементов из G будет достигаться при интегрировании по непрерывным ветвям:

$$\begin{aligned} g_{max} &= \max_{g \in G} g = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}; \\ g_{min} &= \min_{g \in G} g = \int_0^1 -t dt = -\frac{1}{2}; \end{aligned}$$

поэтому $G \subset [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. В G содержатся также элементы, получаемые при интегрировании семейства однозначных ветвей

$$f_\alpha(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq \alpha; \\ -t, & \alpha < t \leq 1. \end{cases}$$

$$I_\alpha = \int_0^1 f_\alpha(t) dt = \int_0^\alpha t dt + \int_\alpha^1 -t dt = \frac{\alpha^2}{2} - \frac{1}{2} + \frac{\alpha^2}{2} = \alpha^2 - \frac{1}{2},$$

где $\alpha \in [0, 1]$. Таким образом, интеграл I_α принимает все значения из отрезка $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Конечно при помощи семейства g_α не перебираются все возможные однозначные ветви, но для любой однозначной ветви $h(t)$ значение $\int_0^1 h(t) dt$ будет лежать между $g_{\min}$ и $g_{\max}$, то есть в отрезке $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Поэтому $G = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Теорема 5 (о внесении знака опорной функции под знак интеграла). Пусть задано измеримое отображение $F(t) : I \longrightarrow \Omega(\mathbf{E}^n)$, причем $|F(t)| \leq k(t)$, где функция $k(t)$ интегрируема по Лебегу на I . Тогда для любого ψ из $\mathbf{E}^n$ выполняется следующее равенство:

$$c \left(\int_{t_0}^{t_1} F(t) dt, \psi \right) = \int_{t_0}^{t_1} c(F(t), \psi) dt.$$

Доказательство. Из определения опорной функции следует, что

$$|c(F(t), \psi)| \leq |F(t)| \cdot \|\psi\| \leq k(t) \cdot \|\psi\| = k_1(t).$$

Домножение на константу функции $k(t)$ не влияет на интегрируемость, поэтому функция $k_1(t)$ также будет интегрируема по Лебегу, а значит интеграл

$$\int_{t_0}^{t_1} c(F(t), \psi) dt$$

существует.

Докажем теперь равенство. Обозначим $\int_{t_0}^{t_1} F(t) dt = G$. Возьмем произвольный элемент g из G . Для него справедливо представление

$$g = \int_{t_0}^{t_1} f(t) dt,$$

где $f(t)$ — некоторая однозначная ветвь отображения $F(t)$. Воспользовавшись тем, что знак скалярного произведения и знак интеграла перестановочны, мы можем написать:

$$\langle g, \psi \rangle = \left\langle \int_{t_0}^{t_1} f(t) dt, \psi \right\rangle = \int_{t_0}^{t_1} \langle f(t), \psi \rangle dt \leq \int_{t_0}^{t_1} c(F(t), \psi) dt.$$

Поскольку данное неравенство выполняется для любых g (в том числе и для тех, на которых достигается максимум произведения $\langle g, \psi \rangle$), то

$$c \left(\int_{t_0}^{t_1} F(t) dt, \psi \right) \leq \int_{t_0}^{t_1} c(F(t), \psi) dt. \quad (13)$$

Докажем теперь неравенство в обратную сторону.

Так как отображение $F(t)$ измеримо, то, по теореме о существовании измеримой ветви, для любого $\psi \in \mathbf{E}^n$ множество ветвей, лежащих в опорном множестве $U(F(t), \psi)$, непусто (хотя бы одна такая ветвь существует), причем для любой такой ветви $\bar{f}(t)$ выполняется

$$\langle \bar{f}(t), \psi \rangle = c(F(t), \psi).$$

Из условий $|F(t)| \leq k(t)$ и $\bar{f}(t) \in F(t)$ следует, что $f(t)$ интегрируема по Лебегу, и значит

$$\int_{t_0}^{t_1} c(F(t), \psi) dt = \int_{t_0}^{t_1} \langle \bar{f}(t), \psi \rangle dt = \left\langle \underbrace{\int_{t_0}^{t_1} \bar{f}(t) dt}_{=\bar{g}}, \psi \right\rangle = \langle \bar{g}, \psi \rangle \stackrel{\bar{g} \in G}{\leq} c(G, \psi).$$

Таким образом

$$\int_{t_0}^{t_1} c(F(t), \psi) dt \leq c\left(\int_{t_0}^{t_1} F(t) dt, \psi\right) \quad (14)$$

Сопоставляя неравенства (13) и (14), получим:

$$\int_{t_0}^{t_1} c(F(t), \psi) dt = c\left(\int_{t_0}^{t_1} F(t) dt, \psi\right);$$

то есть утверждение теоремы доказано. $\square$

Пример 19. Пусть отображение $F(t) = t \cdot \{-1, 1\}$ задано на отрезке $I = [0, 1]$. Как было показано в примере 18,

$$G = \int_0^1 F(t) dt = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

$$c(G, \psi) = \int_0^1 c(F(t), \psi) dt = \int_0^1 t \|\psi\| dt = \|\psi\| \int_0^1 t dt = \frac{1}{2} \|\psi\|,$$

что верно для любого ψ из $\mathbf{E}^n$. Ту же опорную функцию имеет шар $S_{\frac{1}{2}}(0)$, а так как, согласно теореме Ляпунова, множество G выпукло, то равенство опорных функций означает равенство самих множеств: $G = S_{\frac{1}{2}}(0) = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ (здесь $S_{\frac{1}{2}}(0) \subset \mathbb{R}$).

Пример 20. Пусть отображение $F(t) : I \longrightarrow \Omega(\mathbb{R}^2)$, равное $F(t) = A(t) \cdot \{-v, v\}$, где

$$A(t) = \begin{pmatrix} \sin t & t^3 \\ \cos t & t^8 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

задано на отрезке $[-\pi, \pi]$. Построим множество G , для чего сначала найдем его опорную функцию:

$$\begin{aligned}
c(G, \psi) &= c\left(\int_{-\pi}^{\pi} F(t) dt, \psi\right) \stackrel{\text{теорема 5}}{=} \int_{-\pi}^{\pi} c(F(t), \psi) dt = \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} c(\{A(t)v, -A(t)v\}, \psi) dt \stackrel{\text{CB-BO 4}}{=} \int_{-\pi}^{\pi} \max(\langle A(t)v, \psi \rangle, -\langle A(t)v, \psi \rangle) dt = \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} |\langle A(t)v, \psi \rangle| dt = \int_{-\pi}^{\pi} \left| \left\langle \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \right\rangle \right| dt = \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} |\psi_1 \sin t + \psi_2 \cos t| dt, \tag{15}
\end{aligned}$$

где ψ_1 и ψ_2 — компоненты вектора $\psi \in \mathbf{E}^2$. Очевидно, любой вектор $\psi \in \mathbf{E}^2$ можно представить в виде

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \|\psi\| \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}, \quad \text{где } \alpha \in [0, 2\pi),$$

что следует из представления вектора в полярных координатах. Тогда (15) продолжится следующим образом:

$$\|\psi\| \int_{-\pi}^{\pi} |\cos \alpha \sin t + \sin \alpha \cos t| dt = \|\psi\| \int_{-\pi}^{\pi} |\sin(t + \alpha)| dt = 4\|\psi\| = c(S_4(0), \psi).$$

Так как множество G выпукло (по теореме Ляпунова), то $G = S_4(0)$.

Пример 21. Пусть имеется отображение $F(t) = F$, то есть его значение есть некоторое фиксированное множество при любом t из отрезка $[t_0, t_1]$. Тогда

$$\begin{aligned}
c(G, \psi) &= \int_{t_0}^{t_1} c(F(t), \psi) dt = \int_{t_0}^{t_1} c(F, \psi) dt = (t_1 - t_0) c(F, \psi) \stackrel{\text{CB-BO 7}}{=} \\
&= (t_1 - t_0) c(\text{conv } F, \psi) \stackrel{\text{CB-BO 4}}{=} c((t_1 - t_0) \text{conv } F, \psi).
\end{aligned}$$

То есть $G = (t_1 - t_0) \text{conv } F$.

Теорема 6. Пусть $I = [t_0, t_1]$, отображение $F(t) : I \longrightarrow \Omega(\mathbf{E}^n)$ измеримо и $|F(t)| \leq k(t)$, где $k(t)$ — интегрируемая по Лебегу функция. Тогда функция

$$G(\tau) = \int_{t_0}^{\tau} F(t) dt$$

непрерывна по τ .

Доказательство. В силу теоремы о внесении знака опорной функции под знак интеграла для любого ψ из пространства $\mathbf{E}^n$ выполняется равенство

$$c(G(\tau), \psi) = c\left(\int_{t_0}^{\tau} F(t) dt, \psi\right) = \int_{t_0}^{\tau} c(F(t), \psi) dt.$$

Из свойств интеграла Лебега вытекает, что функция $c(G(\tau), \psi)$ непрерывна по τ при любом фиксированном $\psi \in \mathbf{E}^n$. По лемме 3 из непрерывности опорной функции следует непрерывность отображения $\text{conv } G(\tau)$, а по теореме Ляпунова, множество $G(\tau)$ при любом τ выпукло, значит $\text{conv } G(\tau) = G(\tau)$.

Теорема доказана. □

3 Принцип максимума Понтрягина

Экспоненциал матрицы

Из математического анализа известно разложения экспоненты в ряд Тейлора:

$$e^a = 1 + \frac{a}{1!} + \frac{a^2}{2!} + \cdots + \frac{a^n}{n!} + \cdots$$

По аналогии с этим разложением вводится понятие экспоненциала матрицы.

Определение 19. Пусть дана произвольная матрица A размера $n \times n$. Экспоненциалом матрицы A называется матричный ряд (E — единичная матрица)

$$e^A = E + \frac{1}{1!}A + \frac{1}{2!}A^2 + \cdots + \frac{1}{n!}A^n + \cdots \quad (16)$$

Покажем что этот ряд сходится абсолютно для любой матрицы A . Пусть

$$A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n, \quad e^A = \{e_{ij}\}_{i,j=1}^n,$$

a — максимальный по модулю элемент матрицы A :

$$a = \max_{i,j=\overline{1,n}} |a_{ij}|.$$

Обозначим через $(A)_{ij}$ элемент a_{ij} матрицы A , тогда для любых i и j

$$|(A)_{ij}| \leq a, \quad |(A^2)_{ij}| \leq na^2, \quad |(A^3)_{ij}| \leq n^2a^3, \quad \dots, \quad |(A^n)_{ij}| \leq n^{k-1}a^k = \frac{(na)^k}{n};$$

$$\begin{aligned}
|e_{ij}| &\leq 1 + a + \frac{na^2}{2!} + \frac{n^2a^3}{3!} + \dots + \frac{n^k - 1a^k}{k!} + \dots = \\
&1 + a + \frac{1}{n} \left(\frac{(na)^2}{2!} + \frac{(na)^3}{3!} + \dots + \frac{(na)^k}{k!} + \dots \right) = \\
&1 + a + \frac{1}{n} \left(1 + na + \frac{(na)^2}{2!} + \frac{(na)^3}{3!} + \dots + \frac{(na)^k}{k!} + \dots - 1 - na \right) = \\
&1 + na + \frac{1}{n}(e^{na} - 1 - na).
\end{aligned}$$

Все элементы матрицы A (а значит и число a) конечны, ее размер n — тоже. Итак, каждый элемент матрицы e^A не превосходит константы, следовательно матричный ряд (16) сходится.

Рассмотрим ряд, зависящий от вещественного параметра t :

$$e^{tA} = E + \frac{t}{1!}A + \frac{t^2}{2!}A^2 + \dots + \frac{t^n}{n!}A^n + \dots \quad (17)$$

Сделав замену $tA = B$, и учитывая, что $t^n A^n = (tA)^n = B^n$, мы можем повторить доказательство сходимости ряда при любом t . Значит e^{tA} есть абсолютно сходящийся ряд с радиусом сходимости по t равным ∞ .

Докажем, что выполняется равенство $e^{tA} \cdot e^{sA} = e^{(t+s)A}$:

$$\begin{aligned}
e^{tA} \cdot e^{sA} &= \left(E + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \dots \right) \left(E + sA + \frac{s^2}{2!}A^2 + \frac{s^3}{3!}A^3 + \dots \right) = \\
&= E + tA + sA + \frac{t^2}{2!}A^2 + tsA^2 + \frac{s^2}{2!}A^2 + \dots = \\
&= E + (t+s)A + \frac{1}{2!}(t^2 + 2ts + s^2)A^2 + \dots = e^{(t+s)A}.
\end{aligned}$$

Из доказанного свойства следует, что если e^A — невырожденная матрица, то e^{-A} — ее обратная матрица. Действительно, по доказанному

$$e^A \cdot e^{-A} = e^{(1+(-1))A} = e^O = E,$$

(здесь O — нулевая матрица). Аналогично, матрица e^{-tA} будет обратной к матрице e^{tA} при любом вещественном t .

Замечание. По аналогии со свойствами экспоненты, известными из математического анализа, можно предположить, что

$$e^A \cdot e^B = e^{A+B},$$

где A и B — различные матрицы, однако в общем случае это не так. Но можно показать, что данное равенство выполняется тогда и только тогда, когда $AB = BA$. Действительно,

$$(A + B)^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} A^k B^{m-k} = \sum_{\substack{k,l \geq 0 \\ k+l=m}} \frac{m!}{k! l!} A^k B^l,$$

поэтому в произведении

$$\begin{aligned} \left(E + A + \frac{1}{2!} A^2 + \frac{1}{3!} A^3 + \dots \right) \left(E + B + \frac{1}{2!} B^2 + \frac{1}{3!} B^3 + \dots \right) = \\ = E + AB + \frac{1}{2!} A^2 + \frac{1}{2!} B^2 + \dots \end{aligned}$$

собрать соответствующие слагаемые вида $A^k B^l$ для каждого $(A + B)^l$ удастся только при выполнении условия $AB = BA$.

Ряд e^{tA} можно дифференцировать сколько угодно число раз, причем

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA} = e^{tA} A. \quad (18)$$

Продифференцировав ряд (17), получим:

$$\begin{aligned} (e^{tA})' &= E' + \left(\frac{t}{1!} A \right)' + \left(\frac{t^2}{2!} A^2 \right)' + \dots + \left(\frac{t^n}{n!} A^n \right)' + \dots = \\ &= O + \left(\frac{t}{1!} \right)' A + \left(\frac{t^2}{2!} \right)' A^2 + \dots + \left(\frac{t^n}{n!} \right)' A^n + \dots = \\ &= A + \frac{t}{1!} A^2 + \frac{t^2}{2!} A^3 + \dots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} A^n + \dots \end{aligned}$$

Далее, воспользовавшись дистрибутивностью умножения матриц, мы можем вынести A за скобку справа или слева, после чего получим формулу (18).

Пример 22. Определим экспоненциал матрицы A при

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$e^{tA} = E + t \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \dots + \frac{t^n}{n!} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^n + \dots = E$$

Пример 23. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \dots,$$

значит

$$e^{tA} = E + tA = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Из определения экспоненциала вытекает также, что $e^{A^*} = (e^A)^*$, где символом $*$ обозначена операция транспонирования.

Пример 24. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда, очевидно, $-A = A^*$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -E;$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = -E \cdot A = -A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = (-E)(-E) = E;$$

$$A^5 = A, \quad A^6 = -E, \quad A^7 = -A, \quad A^8 = E \quad \dots$$

Значит экспоненциал будет иметь вид:

$$e^{tA} = E + t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2!} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{t^3}{3!} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{t^4}{4!} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \dots$$

Посчитаем каждый элемент матрицы e^{tA} по отдельности:

$$e_{11} = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \frac{t^8}{8!} + \dots$$

Это тейлоровское разложение функции $\cos t$, то есть $e_{11} = \cos t$. Аналогично:

$$e_{12} = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \dots = \sin t;$$

$$e_{21} = -t + \frac{t^3}{3!} - \frac{t^5}{5!} + \frac{t^7}{7!} + \dots = -\sin t;$$

$$e_{22} = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \frac{t^8}{8!} + \dots = \cos t.$$

Окончательное выражение для экспоненциала:

$$e^{tA} = e^{t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & -\cos t \end{pmatrix}$$

Отметим важное свойство экспоненциала. Пусть для матричной функции $x(t)$ задано матричное дифференциальное уравнение:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = E \end{cases} ; \quad (19)$$

тогда $x(t) = e^{tA}$ является решением этого уравнения. Действительно, $x(t)$ удовлетворяет начальному условию $x(0) = e^0 = E$, а производная $x(t)$ равна

$$\dot{x}(t) = (e^{tA})' = Ae^{tA} = Ax(t).$$

Подставив выражение $Ax(t)$ в уравнение и домножив обе части уравнения слева на A^{-1} , получим тождество.

Экспоненциал можно найти, вычисляя каждый столбец по отдельности. Пусть $E = \{e\}_{i,j=1}^n$. Обозначим i -ый столбец единичной матрицы через e_i :

$$e_i = \begin{pmatrix} e_{1i} \\ e_{2i} \\ \vdots \\ e_{ni} \end{pmatrix} ;$$

Тогда из условия

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = e_i \end{cases} , \quad i = 1, 2, \dots, n$$

(здесь $x(t)$ — уже векторная функция) мы можем для каждого $i = 1, 2, \dots, n$ найти решение $x(t)$, которое будет i -ым столбцом экспоненциала и таким образом последовательно найти все столбцы экспоненциала.

Пример 25. Пусть матрица уравнения (19) имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда уравнение (19) можно переписать в виде системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases} ,$$

решая которую, находим: $x_1 = c_2 t + c_1$, $x_2 = c_2$. Подставляя в начальное условие e_1 и e_2 , находим константы:

$$x(0) = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} c_2 = 0 \\ c_1 = 1 \end{matrix} \Rightarrow x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$x(t)$ — это первый столбец экспоненциала.

$$x(0) = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} c_2 = 1 \\ c_1 = 0 \end{matrix} \Rightarrow x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix};$$

здесь $x(t)$ — второй столбец экспоненциала. Таким образом, экспоненциал будет иметь вид:

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что его формула совпадает с найденной в примере 23.

Определение 20. Функция $x(t)$ называется *абсолютно непрерывной* на отрезке $[t_0, t_1]$, если $x(t)$ почти всюду дифференцируема, ее производная $\dot{x}(t)$ интегрируема по Лебегу на отрезке $[t_0, t_1]$ и для любого t из этого отрезка выполняется равенство

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t \dot{x}(s) \, ds;$$

(здесь интеграл рассматривается в смысле Лебега).

В классе абсолютно непрерывных функций можно распространить теорию обыкновенных дифференциальных уравнений.

Пусть дана задача Коши:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + u(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}, \quad (20)$$

тогда формула

$$x(t) = e^{(t-t_0)A}x_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A}u(s) \, ds = e^{(t-t_0)A} \left(x_0 + \int_{t_0}^t e^{(t_0-s)A}u(s) \, ds \right) \quad (21)$$

называется *формулой Коши*.

Теорема 7 (Каратеодори). Рассмотрим задачу Коши (20), где $U(t)$ интегрируема по Лебегу на отрезке $[t_0, t_1]$. Тогда решение задачи Коши существует и единственно на этом отрезке и дается формулой Коши (21), в которой интеграл берется по Лебегу.

Доказательство. Напомним формулу дифференцирования под знаком интеграла:

$$\left(\int_{a(t)}^{b(t)} f(t, y) dy \right)'_t = b'(t) \cdot f(t, b(t)) - a'(t) \cdot f(t, a(t)) + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{d}{dt} f(t, y) dy.$$

Из формулы Коши (21), используя формулу дифференцирования интеграла, найдем $\dot{x}(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \left(e^{(t-t_0)A} x_0 + e^{(t-t_0)A} \int_{t_0}^t e^{(t_0-s)A} u(s) ds \right)'_t = \\ &= A e^{(t-t_0)A} x_0 + e^{(t-t_0)A} e^{(t_0-t)A} u(t) + A e^{(t-t_0)A} \int_{t_0}^t e^{(t_0-s)A} u(s) ds = \\ &= A \left[e^{(t-t_0)A} x_0 + e^{(t-t_0)A} \int_{t_0}^t e^{(t_0-s)A} u(s) ds \right] + u(t) = Ax(t) + u(t) \end{aligned}$$

для почти всех t из отрезка $[t_0, t_1]$. Таким образом существование решения доказано. Докажем единственность. Пусть $x(t)$ и $y(t)$ — два решения задачи Коши (20). Обозначим через $z(t)$ разность этих решений: $z(t) = x(t) - y(t)$, тогда

$$\begin{cases} \dot{z} = \dot{x} - \dot{y} = Ax - Ay = A(x - y) = Az, \\ z(t_0) = x(t_0) - y(t_0) = x_0 - x_0 = 0. \end{cases} \quad (22)$$

Это уравнение имеет только одно решение в классе абсолютно непрерывных функций. Обозначим $\varphi(t) = \|z(t)\|^2 \cdot e^{-2(t-t_0)\|A\|}$. Покажем, что $\varphi(t) = 0$ почти всюду на $[t_0, t_1]$.

$$\frac{d}{dt} (\|z(t)\|^2) = \frac{d}{dt} \langle z(t), z(t) \rangle = 2 \langle \dot{z}(t), z(t) \rangle \stackrel{(22)}{=} 2 \langle Az, z \rangle \leq 2\|A\| \cdot \|z\|^2 \quad (23)$$

По формуле производной сложной функции для любого t верно:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}(t) &= \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d}{dt} (\|z(t)\|^2 \cdot e^{-2(t-t_0)\|A\|}) = \\ &= \frac{d}{dt} (\|z(t)\|^2) \cdot e^{-2(t-t_0)\|A\|} - 2\|A\| \cdot e^{-2(t-t_0)\|A\|} \cdot \|z(t)\|^2 \stackrel{(23)}{\leq} 0 \end{aligned}$$

$$\leq 2\|A\| \cdot \|z(t)\|^2 e^{-2(t-t_0)\|A\|} - 2\|A\| \cdot \|z(t)\|^2 e^{-2(t-t_0)\|A\|} = 0;$$

поэтому

$$\varphi(t) = \underbrace{\varphi(t_0)}_{=0} + \int_{t_0}^t \underbrace{\dot{\varphi}(s)}_{\leq 0} ds \leq 0$$

В то же время

$$\varphi(t) = \underbrace{\|z(t)\|^2}_{\geq 0} \underbrace{e^{-2(t-t_0)\|A\|}}_{\geq 0} \geq 0.$$

Это значит, что $\varphi(t) \equiv 0$ при почти всех t из $[t_0, t_1]$, а отсюда, в свою очередь, следует, что $\|z(t)\| = 0$ (так как $e^{-2(t-t_0)\|A\|}$ не обращается в ноль), а значит и $z(t) \equiv 0$ почти всюду на отрезке $[t_0, t_1]$. Учитывая, что $z(t) = x(t) - y(t)$, получаем: $x(t) = y(t)$, то есть любые два решения задачи Коши совпадают. $\square$

Замечание. Начальное условие можно задать и на правом конце отрезка:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + u(t), \\ x(t_1) = x_1; \end{cases}$$

можно совершенно аналогично показать, что в этом случае решение будет иметь вид:

$$x(t) = e^{(t-t_1)A}x_1 + \int_{t_1}^t e^{(t-s)A}u(s) ds.$$

Пример 26.

$$\begin{cases} \dot{x} = u(t), & x \in \mathbf{E}^2, u \in \mathbf{E}^2 \\ x(t_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}, \quad \text{где} \\ u(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, & 0 \leq t \leq 1, \\ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, & 1 < t \leq 2. \end{cases}$$

Очевидно, матрица A — нулевая, поэтому $e^{tA} = E$ (см. пример 22). Согласно формуле Коши решение имеет вид:

$$\begin{aligned} x(t) &= Ex_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)O}u(s) ds = x_0 + \int_{t_0}^t u(s) ds = \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_{t_0}^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 1+t \\ 1+t \end{pmatrix}, \quad \text{при } 0 \leq t \leq 1. \end{aligned}$$

Чтобы найти решение на второй части отрезка, можно теперь $x(1) = x_1$ рассматривать как начальное условие:

$$x(1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad x(t) = x_2 + \int_{t_0}^t u(s) ds = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \int_{t_0}^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 1+t \\ 3-t \end{pmatrix}.$$

Заметим, что в точке $(\frac{2}{2})$, то есть при $t = 1$, производной не существует (производная кусочно-непрерывна).

+Рисунок

Множества достижимости и управляемости

Рассмотрим основную задачу оптимального управления:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + u, \\ x(t_0) \in M_0, x(t_1) \in M_1 \end{cases}$$

Пусть множество U всевозможных значений, которые принимает управление $u(t)$, является компактом для почти всех t . Тогда, очевидно, $\|u(t)\| \leq |U|$ почти для всех t . Значения функции $x(t)$ можно считать координатами некоторой точки, а t можно рассматривать как временную координату. Задача состоит в том, чтобы перевести точку $x(t_0)$ в точку $x(t_1)$ и при этом свести затрачиваемое время $t_1 - t_0$ к минимуму.

Определение 21. Множество, определяемое следующим образом:

$$X(t) = \left\{ x \in \mathbf{E}^n : x = e^{(t-t_0)A}x_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A}u(s) \, ds, \quad x_0 \in M_0, u(\cdot) \in D_U \right\} = \\ \bigcup_{\substack{x_0 \in M_0 \\ u(\cdot) \in D_U}} \left\{ e^{(t-t_0)A}x_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A}u(s) \, ds \right\},$$

называется *множеством достижимости*.

Через D_U обозначен класс допустимых управлений, то есть множество функций, откуда могут браться функции u , а через $u(\cdot) \in D_U$ — принадлежность к этому классу. Нетрудно видеть, что $X(t)$ — это множество решений задачи Коши по всевозможным начальным данным и допустимым функциям управления.

Пусть $x(t_0) = M_0$, то есть множество M_0 состоит из одной точки (начальное условие определено однозначно). Сформулируем некоторые предположения при которых наша задача имеет смысл.

- $x(t_0) \cap M_1 = \emptyset$, — исходная точка изначально не находится в том множестве, куда ее надо перевести.
- Существует такое положительное ε , что $x(t) \cap M_1 = \emptyset$ при $t \in [t_0, t_0 + \varepsilon]$. Иначе говоря, точка $x(t)$ не попадает в множество M_1 при малейшем изменении t .

- Если t_1 — время быстрогодействия, то $x(t) \cap M_1 = \emptyset$ для t из полуинтервала $[t_0, t_1)$. Но $x(t_1) \cap M_1 \neq \emptyset$, то есть точка $x(t)$ попадает в множество M_1 только при достижении времени t_1 .

Получим некоторые свойства множества достижимости.

1. Заметим, что множество достижимости является многозначным отображением, зависящим от параметра t . Его формулу можно переписать в виде:

$$X(t) = e^{(t-t_0)A}M_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A}U \, ds \quad (24)$$

2. При каждом t множество $X(t)$ — компакт. Это вытекает из представления (24) и теоремы Ляпунова.
3. Если M_0 — выпуклый компакт, то $X(t)$ — также выпуклый компакт. Это также следует из теоремы Ляпунова.

Следствие. В частном случае, при $M_0 = \{x_0\}$, множество $X(t)$ — выпуклое.

4. $X(t)$ непрерывно зависит от $\tau = t - t_0$ (длины интервала). Согласно теореме о внесении знака опорной функции под знак интеграла имеем:

$$c \left(\int_{t_0}^t e^{(t-s)A}U \, ds, \psi \right) = \int_{t_0}^t c(e^{(t-s)A}U, \psi) \, ds \stackrel{\text{св-во 4}}{=} \int_{t_0}^t c(U, e^{(t-s)A*}\psi) \, ds$$

сделаем замену: $t - s = \alpha$, тогда $d\alpha = -ds$ и

$$\int_{t-t_0}^0 c(U, e^{\alpha A*}\psi)(-d\alpha) = \int_0^{t-t_0} c(U, e^{\alpha A*}\psi) \, d\alpha$$

$$\int_{t_0}^t e^{(t-s)A}U \, ds = \int_0^{t-t_0} e^{\alpha A}U \, d\alpha \stackrel{t-t_0=\tau}{=} X(\tau)e^{\tau A}M_0 + \int_0^\tau e^{\alpha A}U \, d\alpha$$

— непрерывно по τ .

5. Так как $\tau = t - t_0$, то из свойства 4 следует, что $X(t)$ непрерывно также по t .

Определение 22. Множество, определяемое по правилу

$$\begin{aligned} Y(t) &= \left\{ x \in \mathbf{E}^n : x = e^{(t-t_1)A}x_1 + \int_{t_1}^t e^{(t-s)A}u(s) \, ds, \ x_1 \in M_1, u(\cdot) \in D_U \right\} = \\ &= \bigcup_{\substack{x \in M_1 \\ u(\cdot) \in D_U}} \left\{ e^{(t-t_1)A}x_1 + \int_t^{t_1} e^{(t-s)A}(-u(s)) \, ds \right\}, \end{aligned}$$

называется множеством управляемости.

Множество управляемости состоит из точек, стартуя из которых в момент времени t , в момент времени t_1 мы окажемся в M_1 . Это решения задачи Коши, для которой краевое условие задано на правом конце отрезка.

В дальнейшем будем считать, что $Y(t_1) = M_1$, а также что существует такое $\varepsilon > 0$, что $Y(t) \cap M_0 = \emptyset$, при $t \in [t_1 - \varepsilon, t_1]$. Свойства множества управляемости аналогичны свойствам множества достижимости:

1. Для множества управляемости справедливо представление:

$$Y(t) = e^{(t-t_1)A}M_1 + \int_t^{t_1} e^{(t-s)A}(-U) ds$$

2. При любом t множество $Y(t)$ — компакт.
3. Из того, что M_1 — выпуклый компакт следует, что $Y(t)$ — выпуклый компакт.
4. Многозначное отображение

$$Y(\tau) = e^{-\tau A}M_1 + \int_0^\tau e^{-\alpha A}(-U) d\alpha, \quad \text{где } \tau = t_1 - t$$

непрерывно по τ .

5. $Y(t)$ непрерывно зависит от t .

Доказываются эти свойства точно также, как и свойства множества достижимости.

Пример 27. Пусть задача выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{x} = u, & x, u \in \mathbf{E}^2, \\ U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}, \\ M_0 = M_1 = \{0\}; \end{cases}$$

то есть матрица A — нулевая. Тогда множества достижимости и управляемости будут иметь вид:

$$\begin{aligned} X(t) &= \{0\} + \int_0^1 U ds = t \operatorname{conv} U, \\ Y(t) &= \{0\} + \int_0^1 (-U) ds = t \operatorname{conv} (-U). \end{aligned}$$

+Рисунок

Или, иначе:

$$\begin{aligned} X(t) &= \{x : x_1 = t, |x_2| \leq t\}, \\ Y(t) &= \{x : x_1 = -t, |x_2| \leq t\}. \end{aligned}$$

Пример 28. Модель математического маятника. Его уравнение имеет вид:

$$\ddot{x} + x = V, \quad |V| \leq 1.$$

Сделав замену $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$ получаем систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + V \end{cases} \quad \text{с матрицей } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix};$$

или, что то же самое:

$$\begin{cases} \dot{x} = x_2 + u_1, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + u_2, \end{cases} \quad \text{где } U = \{u \in \mathbf{E}^n : u_1 = 0, |u_2| \leq 1\}.$$

Теперь функции $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, принимающие значения из U можно рассматривать, как управления в основной задаче. Заметим сразу, что $c(U, \psi) = |\psi_2|$.

В примере 24 было показано, что для данной матрицы экспоненциал e^{tA} имеет вид:

$$e^{tA} = e^{t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & -\cos t \end{pmatrix}$$

Согласно свойству 4, множество достижимости представимо в виде:

$$X(\tau) = e^{\tau A} M_0 \int_0^\tau e^{sA} U \, ds.$$

Посчитаем для него опорную функцию:

$$c(X(\tau), \psi) \stackrel{\text{теор. 5}}{=} \int_0^\tau c(e^{sA} U, \psi) \, ds = \int_0^\tau c(U, e^{sA*} \psi) \, ds \quad (25)$$

Пусть $\psi = (\psi_1, \psi_2) \in S$. Тогда его компоненты представимы в виде:

$$\psi_1 = \cos \alpha, \psi_2 = \sin \alpha, \quad \text{где } 0 \leq \alpha < 2\pi; \quad (26)$$

тогда равенство (25) можно продолжить следующим образом (далее рассматривается только $\tau \in [0, \pi]$):

$$\int_0^\tau |\psi_1 \sin s + \psi_2 \cos s| \, ds = \int_0^\tau |\sin(\alpha + s)| \, ds = \alpha + s = \theta \int_\alpha^{\alpha+\tau} |\sin \theta| \, d\theta;$$

посчитав интеграл получим:

$$c(X(\tau), \psi) = \begin{cases} (1 - \cos \tau) \cos \alpha + \sin \tau \sin \alpha, & 0 \leq \alpha \leq \pi - \tau; \\ 2 + (1 + \cos \tau) \cos \alpha - \sin \tau \sin \alpha, & \pi - \tau \leq \alpha \leq \pi; \\ (\cos \tau - 1) \cos \alpha - \sin \tau \sin \alpha, & \pi \leq \alpha \leq 2\pi - \tau; \\ 2 - (1 + \cos \tau) \cos \alpha + \sin \tau \sin \alpha, & 2\pi - \tau \leq \alpha \leq 2\pi. \end{cases}$$

Возвращаясь к обозначениям (26), получаем:

$$c(X(\tau), \psi) = \begin{cases} (1 - \cos \tau)\psi_1 + \sin \tau \cdot \psi_2, & 0 \leq \alpha \leq \pi - \tau; \\ 2\|\psi\| + (1 + \cos \tau)\psi_1 - \sin \tau \cdot \psi_2, & \pi - \tau \leq \alpha \leq \pi; \\ (\cos \tau - 1)\psi_1 - \sin \tau \cdot \psi_2, & \pi \leq \alpha \leq 2\pi - \tau; \\ 2\|\psi\| - (1 + \cos \tau)\psi_1 + \sin \tau \cdot \psi_2, & 2\pi - \tau \leq \alpha \leq 2\pi. \end{cases}$$

...

Определение 23. Если дана система

$$\dot{x} = Ax + u, \quad (27)$$

то система с сопряженной матрицей

$$\dot{\psi} = A^* \psi$$

называется сопряженной системой к системе (27).

Лемма 8.

$$c(X(t), \psi(t)) = c(M_0, \psi(t_0)) + \int_{t_0}^t c(U, \psi(s)) \, ds$$

$$c(X(t), -\psi(t)) = c(M_0, -\psi(t_0)) + \int_t^{t_1} c(U, \psi(s)) \, ds$$

$$\langle x(t), \psi(t) \rangle = \langle x(t_0), \psi(t_0) \rangle + \int_{t_0}^t \langle u(s), \psi(s) \rangle \, ds$$

$$\langle x(t), -\psi(t) \rangle = \langle x(t_0), -\psi(t_0) \rangle + \int_t^{t_1} \langle u(s), \psi(s) \rangle \, ds$$

$$\begin{aligned} c(X(t), \psi) &= c(e^{(t-t_0)A}M_0, \psi) + \int_{t_0}^t c(e^{(t-s)A}U, \psi) \, ds = \\ &= c(M_0, e^{(t-t_0)A^*}\psi) + \int_{t_0}^t c(U, e^{(t-s)A^*}\psi) \, ds \end{aligned}$$

$$X(t) = e^{(t-t_0)A} \left(x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-(s-t_0)A} u(s) \, ds \right)$$

Определение 24. Объект называется управляемым на $[t_0, t_1]$ из M_0 в M_1 , если существуют такое $u(\cdot) \in D_U$ и такое $x(t_0) \in M_0$, что под действием этого управления $x(t_1) \in M_1$ или, что то же самое, $X(t_0) \cap M_1 \neq \emptyset$.

$$c(M_0, \psi(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} c(U, \psi(s)) ds + c(M_1, \psi(t_1)) \geq 0 \quad (28)$$

В случае выпуклых $X(t_0)$ и M_0 это определение, согласно свойству 11, можно переписать в виде еще одной эквивалентной формулировки:

$$c(X(t_0), \psi) + c(M_1, -\psi) \geq 0$$

для любого ненулевого ψ из $\mathbf{E}^n$.

Теорема 8 (Критерий управляемости). 1. Если M_0, M_1 — компакты, то выражение (28) — необходимое условие управляемости на $[t_0, t_1]$ из M_0 в M_1 .

2. Если M_0, M_1 — выпуклые компакты, то выражение (28) — необходимое и достаточное условие управляемости на $[t_0, t_1]$ из M_0 в M_1 .